

ITPASS 数値計算実習課題その 1

高田 和佳 担当情報実験機:joho07

2011 年 7 月 28 日

1 2 体問題

1.1 慣性系における中心星と惑星の運動方程式

中心星に働く力を F_{12} 、惑星に働く力を F_{21} とおくと中心星の質量は m_1 、惑星の質量は m_2 なので、それぞれの運動方程式は

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} \quad (1)$$

$$\mathbf{F}_{21} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} \quad (2)$$

となる。また、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ と万有引力の法則を用いると

$$\mathbf{F}_{12} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_{21} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (4)$$

よって (1),(2),(3),(4) 式より

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (5)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (6)$$

と書ける。ここから (5),(6) 式を整理していく。

(5) 式を両辺 m_1 で、(6) 式を両辺 m_2 で割ると

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (7)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (8)$$

(4) - (3) 式に、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ を代入すると

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (9)$$

が求まる。 $\ddot{\mathbf{r}} = d^2 \mathbf{r} / dt^2$ より (9) は

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (10)$$

となり、求める式を導出することが出来た。また上記の式は、二天体の相対ベクトルの式となっている。これは2天体の質量を足し合わせた質点が相対ベクトル上を、中心星を中心に回転運動する(ケプラー運動をする)ことを表している。

1.2 速度ベクトル

定義より

$$(\dot{v}_x, \dot{v}_y) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (11)$$

$\mathbf{r} = (x, y)$ 、(9) を用いて (11) は

$$(\dot{v}_x, \dot{v}_y) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y) \quad (12)$$

と書ける。よって \dot{v}_x と \dot{v}_y は

$$\dot{v}_x = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x \quad (13)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y \quad (14)$$

と書くことが出来る。

2 3体問題

2.1

中心星と惑星は x 軸上にあることから、 y_1 と y_2 は共に 0 である。 x 座標について考えると、二つの座標系の原点が中心星と惑星の重心であることから

$$|x_2| : |x_1| = \mu_1 : \mu_2 \quad (15)$$

(15), $r=1, \mu_1 + \mu_2 = 1$ より

$$|x_1| = 1 \times \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \mu_2 \quad (16)$$

$$|x_2| = 1 \times \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = \mu_1 \quad (17)$$

よって

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0) \quad (18)$$

$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0) \quad (19)$$

2.2

まず、角速度の定義より $\theta = \omega t$ と書くことが出来る。
また、 (ξ, η) は $\theta = \omega t$ を用いて

$$\xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t \quad (20)$$

$$\eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t \quad (21)$$

と書くことが出来る。

2.3

(20),(21) を t で微分すると

$$\dot{\xi} = (\dot{x} - \omega y) \cos \omega t - (\dot{y} + \omega x) \sin \omega t \quad (22)$$

$$\dot{\eta} = (\dot{x} - \omega y) \sin \omega t + (\dot{y} + \omega x) \cos \omega t \quad (23)$$

さらに (22),(23) を微分すると

$$\ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \cos \omega t - (\dot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \sin \omega t \quad (24)$$

$$\ddot{\eta} = (\dot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \cos \omega t + (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \sin \omega t \quad (25)$$

以上より求める式を書くことが出来た。

2.4

準備として (18)(19)(20)(21) を用いて $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ の値をそれぞれ求める。

$$\xi_1 = x_1 \cos \omega t - y_1 \sin \omega t = -\mu_2 \cos \omega t \quad (26)$$

$$\xi_2 = x_2 \cos \omega t - y_2 \sin \omega t = \mu_1 \cos \omega t \quad (27)$$

$$\eta_1 = x_1 \sin \omega t - y_1 \cos \omega t = -\mu_2 \sin \omega t \quad (28)$$

$$\eta_2 = x_2 \sin \omega t - y_2 \cos \omega t = \mu_1 \sin \omega t \quad (29)$$

与式と (24)(25)(26)(27)(28)(29) を用いると

$$\ddot{\xi} = - \left(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right) \cos \omega t + \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y \sin \omega t \quad (30)$$

$$\ddot{\eta} = - \left(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right) \sin \omega t + \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y \cos \omega t \quad (31)$$

(30)(31) と (24)(25) より

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right] \quad (32)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \quad (33)$$

よって回転系における粒子 P についての運動方程式を導出することが出来た。

2.5

r_1, r_2 の長さはそれぞれ

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2} \quad (34)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2} \quad (35)$$

と書くことが出来る。 $\frac{\mu_1}{r_1}$ と $\frac{\mu_2}{r_2}$ をそれぞれ x で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_1}{r_1} &= -\frac{1}{2} \mu_1 \{(x + \mu_2)^2 + y^2\}^{-\frac{2}{3}} \times (2x + 2\mu_2) \\ &= -\mu_1 \frac{(x + \mu_2)}{r_1^3} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_2}{r_2} &= -\frac{1}{2} \mu_2 \{(x - \mu_1)^2 + y^2\}^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 2\mu_1) \\ &= -\mu_2 \frac{(x - \mu_1)}{r_2^3} \end{aligned} \quad (37)$$

同様に $\frac{\mu_1}{r_1}$ と $\frac{\mu_2}{r_2}$ をそれぞれ y で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu_1}{r_1} &= -\frac{1}{2} \mu_1 \{(x + \mu_2)^2 + y^2\}^{-\frac{2}{3}} \times 2y \\ &= -\frac{\mu_1}{r_1^3} y \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu_2}{r_2} &= -\frac{1}{2} \mu_2 \{(x - \mu_1)^2 + y^2\}^{-\frac{2}{3}} \times 2y \\ &= -\frac{\mu_2}{r_2^3} y \end{aligned} \quad (39)$$

U を x と y でそれぞれ偏微分すると (34)(35)(36)(37) より

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega x^2 - \left[\mu_1 \frac{(x + \mu_2)}{r_1^3} + \mu_2 \frac{(x - \mu_1)}{r_2^3} \right] \quad (40)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega x^2 - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \quad (41)$$

よって、(38)(39) より (30)(31) は

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (42)$$

$$\ddot{y} + 2\omega \dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (43)$$

と書くことができ、 U を用いて表すことが出来た。

2.6

(40)(41) の x 成分に \dot{x} を y 成分に \dot{y} をかけて足し合わせる。

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} &= \dot{x} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \dot{y}\ddot{y} - 2\omega\dot{y}\dot{x} &= \dot{y} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \dot{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{dU}{dt}\end{aligned}\tag{44}$$

(44) を時間について積分すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + C_J &= U \\ C_J &= U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\end{aligned}\tag{45}$$

C_J は積分定数であり、円制限三体問題における保存量のヤコビ定数である。