

数値計算実習レポート 1

坂廻邊 翼 johno 05 (07)

2011年7月28日

1 2体問題

万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

を用いて、惑星の軌道を計算する。問題を簡単にするため、考える系における支配的な力は万有引力のみであるとする。今、質量が m_1 である中心星と、質量が m_2 である惑星のみで構成される惑星系を考える。また中心星及び惑星の位置はベクトル \vec{r}_1 、 \vec{r}_2 で表されるとする。以下では $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

1.1

慣性系において、中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式を導け。またそれから

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\vec{r}$$

を導出せよ。ここで \vec{r} は $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ で表される相対ベクトルである。このとき、上記運動方程式で表される運動がどのようなものかを考察せよ。

中心星の運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -Gm_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

惑星の運動方程式は

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -Gm_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

ここで $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ として上の2つの運動方程式を1つにまとめると

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\vec{r}$$

となる。

これは2天体が万有引力のもとで共通重心を中心に2天体がケプラー運動していること

を表している。

1.2

1. の運動方程式を成分に分けることを考える。

簡単のため、二体は同一平面状を運動していることとする。相対ベクトル $\vec{r} = (x, y)$ に対して、速度を

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (\dot{x}, \dot{y})$$

と定義する。このとき、 \dot{v}_x, \dot{v}_y を \ddot{x}, \ddot{y} を用いて表せ。

1.1 で得た運動方程式を成分に分けると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}y$$

ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であることを考えてやると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y$$

ゆえに求めるべき \dot{v}_x, \dot{v}_y は

$$\dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x$$

$$\dot{v}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y$$

2 3体問題

次に3体問題を考える。ここでは、質量 m_1 の中心星の周りを質量 m_2 の惑星が円運動し、3つ目の天体 P は中心星と惑星に対して質量が無視できるような粒子であるとする（円制限3体問題）。問題1と同様、3つの天体は同一平面上を運動しているとする。このとき、中心星と惑星の座標 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とすると、重心 O を原点とした慣性座標系 (x, y) での粒子の運動方程式の各成分は

$$\ddot{x} = \mu_1 \frac{-x_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{-x_2}{r_2^3}$$
$$\ddot{y} = \mu_1 \frac{-y_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{-y_2}{r_2^3}$$

で表される。 r_1, r_2 はそれぞれ粒子と中心星および惑星との距離、 $\mu_1 = Gm_1, \mu_2 = Gm_2$ である。簡単化のため、 $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1$ 、中心星と惑星との距離 $r = 1$ としている。この運動方程式を、中心星と惑星が静止しているような回転座標系 (x, y) で表してみよう。今、2つの座標系の原点は一致し、 m_1, m_2 は常に x 軸にあるとする。また時刻 $t = 0$ で y 軸と x 軸は一致しているとする。

2.1

2つの座標系の原点が中心星と惑星の重心であることをふまえて、回転系でのそれぞれの座標 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を μ_1, μ_2 を用いて表せ。

2つの座標系の原点が中心星と惑星の重心であることより

$$(x_1, y_1) = \left(-\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, 0 \right)$$
$$(x_2, y_2) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, 0 \right)$$

ここで $\mu_1 + \mu_2 = 1$ であるから

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$$
$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$$

2.2

中心星と惑星は、慣性系において角速度 ω で回転しているとする。このとき、時刻 t における Y 軸と x 軸のなす角度 θ を求めよ。またそれを用いて、 (X, Y) を (x, y) で表す変換式を求めよ。

角速度というのは基本単位時間において進む角度であるから、角速度 ω で回転している時刻 t における角度は

$$\theta = \omega t$$

となる。また (X, Y) を (x, y) で表す回転行列を R とすると

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるので、これより

$$\begin{aligned} X &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ Y &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

となる。

2.3

2. の式を時間で2回微分することにより、慣性系での加速度成分 \ddot{x}, \ddot{y} を、回転系での成分 \ddot{x}, \ddot{y} などを用いて表せ。

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \ddot{x} \cos \theta - \ddot{y} \sin \theta \\ \ddot{Y} &= \ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{X} + \ddot{y} \sin \theta) \cos \theta + (\ddot{Y} - \ddot{x} \sin \theta) \sin \theta \\ \ddot{y} &= (\ddot{X} + \ddot{y} \sin \theta) \sin \theta - (\ddot{Y} - \ddot{x} \sin \theta) \cos \theta \end{aligned}$$

さらに時間で微分することにより

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (\ddot{x} - 2\dot{y} - \omega^2 x)\cos \omega t - (\ddot{y} + 2\dot{x} - \omega^2 y)\sin \omega t \\ \ddot{y} &= (\ddot{x} - 2\dot{y} - \omega^2 x)\sin \omega t + (\ddot{y} + 2\dot{x} - \omega^2 y)\cos \omega t\end{aligned}$$

となる。

2.4

以上の結果と与式から、回転系における粒子 P についての運動方程式を導出せよ。

時刻 $t = 0$ において考えると、このとき $\cos \omega t = 1, \sin \omega t = 0$ であるので上で求めた

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (\ddot{x} - 2\dot{y} - \omega^2 x)\cos \omega t - (\ddot{y} + 2\dot{x} - \omega^2 y)\sin \omega t \\ \ddot{y} &= (\ddot{x} - 2\dot{y} - \omega^2 x)\sin \omega t + (\ddot{y} + 2\dot{x} - \omega^2 y)\cos \omega t\end{aligned}$$

の2式は

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{x} - 2\dot{y} - \omega^2 x \\ \ddot{y} &= \ddot{y} + 2\dot{x} - \omega^2 y\end{aligned}$$

となる。

また $t = 0$ においては y 軸と x 軸は一致しているの、前の問より、このときの $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ は

$$(x_1, y_1) = (r_1, 0) = (\mu_2, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (0, r_2) = (0, \mu_1)$$

となり以上と問で与えられた慣性座標系における運動方程式より

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - \omega^2 x &= - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right] \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - \omega^2 y &= - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y\end{aligned}$$

2.5

力を $F = -\nabla U$ のように表す量 U を、力のポテンシャルとよぶ。4. に現れる力のポテンシャルは、

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$$

と表されることを用いて、4. で求めた方程式を U を用いて表せ。

中心星と粒子、惑星と粒子の距離 r_1, r_2 はそれぞれ

$$r_1 = [(-\mu_2 - x)^2 + y^2]^{1/2}$$

$$r_2 = [(\mu_1 - x)^2 + y^2]^{1/2}$$

で表されることより

$$\frac{\mu_1}{r_1} = [(\mu_2 + x)^2 + y^2]^{-1/2}$$

$$\frac{\mu_2}{r_2} = [(\mu_1 - x)^2 + y^2]^{-1/2}$$

ここで $\frac{\mu_1}{r_1}$ を x で偏微分する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_1}{r_1} = -\frac{\mu_1(x + \mu_2)}{r_1^3}$$

また $\frac{\mu_2}{r_2}$ も x で偏微分する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_2}{r_2} = -\frac{\mu_2(x - \mu_1)}{r_2^3}$$

よっては

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{2}(2x) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \\ &= x - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{(x - \mu_1)}{r_2^3} \right] \end{aligned}$$

同様に $\frac{\mu_1}{r_1}$ と $\frac{\mu_2}{r_2}$ を y で偏微分して、 $\frac{\partial U}{\partial y}$ を求めると

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y - \left[\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right] y$$

この結果と 4 . で求めた方程式を比較すると

$$\ddot{x} - 2 \dot{y} - 2x = -\frac{U}{x} - 2x$$
$$\ddot{y} + 2 \dot{x} - 2y = -\frac{U}{y} - 2y$$

となり、U を用いて表すことができる。

2.6

5 . で得られた結果の x 成分に \dot{x} を、y 成分に \dot{y} をかけて足し合わせ、時間について積分することで現れる積分定数 C_j (円制限 3 体問題における保存量であるヤコビ定数) を求めよ。

5 . で得られた x 成分に \dot{x} をかけて整理すると

$$\dot{x}\ddot{x} - 2 \dot{x}\dot{y} = \dot{x} \frac{\partial U}{\partial x}$$

同様に y 成分に \dot{y} をかけて整理すると

$$\dot{y}\ddot{y} + 2 \dot{x}\dot{y} = \dot{y} \frac{\partial U}{\partial y}$$

上の 2 式を足し合わせて積分することにより

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + C_j = U$$

となりヤコビ定数 C_j が

$$C_j = U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

と求められる。