ITPASS 実習レポート 02

担当情報実験機：joho04　　　坂本花菜

2011/07/21

問題 1

(1)

中心星の運動方程式は

$$m_1\ddot{\mathbf{r_1}} = \mathbf{F_1} \tag{1}$$

惑星の運動方程式は

$$m_2\ddot{\mathbf{r_2}} = \mathbf{F_2} \tag{2}$$

ここで、万有引力の法則より

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$$

したがって式 (1),(2) はそれぞれ、

$$m_1\ddot{\mathbf{r_1}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|^3}(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1})$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r_2}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|^3}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})$$

と書き換えることができる。$\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ を用いると

$$\ddot{\mathbf{r_1}} = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = -\frac{Gm_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

$$\ddot{\mathbf{r_2}} = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}|^3}(-\mathbf{r}) = \frac{Gm_1}{r^3}\mathbf{r} \tag{4}$$

したがって、式 (3),(4) より

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r_2}} - \ddot{\mathbf{r_1}} &= \frac{Gm_1}{r^3}\mathbf{r} - \frac{Gm_2}{r^3}\mathbf{r} \\ &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \qquad (5)\end{aligned}$$

式 (5) より、これらの 2 天体は楕円軌道上を運動すると考えられる。

(2)

$\mathbf{r} = (x,y)$ より、

$$\dot{r} = (\dot{x},\dot{y})$$

$\dot{x}, \dot{y}$ はそれぞれ速度成分なので、

$$\dot{r} = (\dot{x},\dot{y}) = (v_x,v_y)$$

さらに、もう一度 $\mathbf{r}$ を微分を考えると、 $\dot{v_x}, \dot{v_y}$ はそ れぞれ加速度成分なので、

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\dot{v_x},\dot{v_y})$$

また、 $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = (\dot{v_x},\dot{v_y}) &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \\ &= -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y) \end{aligned}$$

したがって、

$$\dot{v_x} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \tag{6}$$

$$\dot{v_y} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{7}$$

問題 2

(1)

m_1 と m_2 は常に x 軸上にあるので、 $y_1 = y_2 = 0$. いま、原点から見て中心星は

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2} \\ &= \frac{\frac{\mu_2}{G}}{\frac{\mu_1}{G}+\frac{\mu_2}{G}} \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \end{aligned} \tag{8}$$

また、惑星は

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2} \\ &= \frac{\frac{\mu_1}{G}}{\frac{\mu_1}{G}+\frac{\mu_2}{G}} \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \end{aligned} \tag{9}$$

の位置にあることがわかる。したがって、x_1 は原点からみて負の位置にあるので

$$\begin{aligned} (x_1,y_1) &= (-\mu_2,0) \quad (10) \\ (x_2,y_2) &= (\mu_1,0) \quad (11) \end{aligned}$$

(2)

時刻 t における ξ 軸と x 軸のなす角 θ は

$$\theta = \omega t \quad (12)$$

慣性系において角速度 ω で回転しているので回転行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

したがって、求める変換式は

$$\xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t \quad (13)$$

$$\eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t \quad (14)$$

(3)

(2) で求めた式 (13),(14) より、

$$\dot{\xi} = (\dot{x}\cos\omega t - \omega x\sin\omega t - (\dot{y}\sin\omega t + \omega y\cos\omega t)$$

$$\ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\omega t - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\omega t \quad (15)$$

$$\dot{\eta} = (\dot{x}\sin\omega t + \omega x\cos\omega t) + (\dot{y}\cos\omega t - \omega y\sin\omega t)$$

$$\ddot{\eta} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\omega t + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\omega t \quad (16)$$

(4)

与式と 3 で得られた結果より、

$$
\begin{aligned}
(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\omega t + & \\
(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\omega t &= \mu_1\frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2\frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\
&= \frac{\mu_1}{r_1^3}(x_1\cos\omega t - y_1\sin\omega t \\
&- x\cos\omega t + y\sin\omega t) \\
&+ \frac{\mu_2}{r_2^3}(x_2\cos\omega t - y_2\sin\omega t \\
&- x\cos\omega t + y\sin\omega t) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

同様にして、もう 1 式求めると

$$
\begin{aligned}
(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\omega t + & \\
(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\omega t &= \mu_1\frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \eta_2\frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\
&= \frac{\mu_1}{r_1^3}(x_1\sin\omega t + y_1\cos\omega t \\
&- x\sin\omega t - y\cos\omega t) \\
&+ \frac{\mu_2}{r_2^3}(x_2\sin\omega t + y_2\cos\omega t \\
&- \sin\omega t - y\cos\omega t) \qquad (18)
\end{aligned}
$$

式 (17) × $\cos\omega t$ + 式 (18) × $\sin\omega t$ より

$$
\begin{aligned}
(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) &= \frac{\mu_1}{r_1^3}(\cos^2\omega t(x_1 - x) - y_1\sin\omega t\cos\omega t + y\sin\omega t\cos\omega t) \\
&+ \frac{\mu_2}{r_2^3}(\cos^2\omega t(x_2 - x) - y_2\sin\omega t\cos\omega t + y\sin\omega t\cos\omega t) \\
&+ \frac{\mu_1}{r_1^3}(\sin^2\omega t(x_1 - x) - y_1\sin\omega t\cos\omega t - y\sin\omega t\cos\omega t) \\
&+ \frac{\mu_2}{r_2^3}(\sin^2\omega t(x_2 - x) - y_2\sin\omega t\cos\omega t - y\sin\omega t\cos\omega t) \\
&= \frac{\mu_1}{r_1^3}(x_1 - x) + \frac{\mu_2}{r_2^3}(x_2 - x) \\
&= -\left[\mu_1\frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x - \mu_1}{r_2^3}\right] \qquad (19)
\end{aligned}
$$

式 (17) × $\sin\omega t$ + 式 (18) × $\cos\omega t$ より

$$\begin{aligned}
-(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2 y) &= \frac{\mu_1}{r_1^3}(\sin\omega t\cos\omega t(x_1-x)-y_1\sin^2\omega t+y\sin^2\omega t)\\
&+ \frac{\mu_2}{r_2^3}(\sin\omega t\cos\omega t(x_2-x)-y_2\sin^2\omega t+y\sin^2\omega t)\\
&- \frac{\mu_1}{r_1^3}(\sin\omega t\cos\omega t(x_1-x)+y_1\cos^2\omega t-y\cos^2\omega t)\\
&- \frac{\mu_2}{r_2^3}(\sin\omega t\cos\omega t(x_2-x)+y_2\cos^2\omega t-y\cos^2\omega t)\\
&= \frac{\mu_1}{r_1^3}y+\frac{\mu_2}{r_2^3}y\\
&= \left[\frac{\mu_1}{r_1^3}+\frac{\mu_2}{r_2^3}\right]y \qquad (20)
\end{aligned}$$

ここで、 $y_1=y_2=0$ であることを用いた。したがって、

$$(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2 y)=-\left[\frac{\mu_1}{r_1^3}+\quad\frac{\mu_2}{r_2^3}\right]y \qquad (21)$$

(5)

三平方の定理を用いて r_1, r_2 を求める。

$$r_1=\sqrt{(\mu_2+x)^2+y^2}$$

$$r_2=\sqrt{(\mu_1-x)^2+y^2}$$

これらを用いて $\frac{\mu_1}{r_1}, \frac{\mu_2}{r_2}$ をそれぞれ x で微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_1}{r_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_1}{\sqrt{(\mu_2+x)^2+y^2}}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\frac{\mu_1(2x+\mu_2)}{((\mu_2+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_2}{r_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_2}{\sqrt{(\mu_1-x)^2+y^2}}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\frac{\mu_2(2x-\mu_1)}{((\mu_1-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3}
\end{aligned}$$

したがって、4 に現れる力のポテンシャルを x で偏微分したものは

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\omega^2 x-\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3}-\mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3} \qquad (22)$$

式 (23) を 4 で求めた運動方程式に代入すると、

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{23}$$

同様にして y 成分も求めると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_1}{r_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_1}{\sqrt{(\mu_2+x)^2+y^2}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{2y\mu_1}{((\mu_2+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\mu_1 y}{r_1^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_2}{r_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_2}{\sqrt{(\mu_1-x)^2+y^2}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{2y\mu_2}{((\mu_1-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\mu_2 y}{r_2^3}
\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y - \frac{\mu_1 y}{r_1^3} - \frac{\mu_2 y}{r_2^3} \tag{24}$$

したがって式 (25) を 4 で求めた運動方程式に代入すると、

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{25}$$

(6)

x 成分である式 (24) に $\dot{x}$ を、y 成分である式 (26) に $\dot{y}$ をかけて足し合わすと、

$$\begin{aligned}
\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \\
&= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{dU}{dt}
\end{aligned} \tag{26}$$

式 (27) の両辺を時間について積分すると

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + C = U$$

ここで C を任意の積分定数と置いた。したがって、時間積分に伴い現れる積分定数 C_J は、

$$C_J = U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{27}$$