

ITPASS 数値計算実習課題その1 (2011年7月1日(金)出題)

天体の軌道計算をする準備として、2体問題と3体問題に関する問題を解いてみましょう。解答にあたっては次のことに注意してください。

- 解答は  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  で作成し、 $\text{T}_\text{E}\text{X}$  のソースファイルと PDF ファイルを提出すること。
- 7月15日(金)に出題される「課題その2」と合わせて提出すること。「課題その2」については7月15日(金)に詳細を告知する。
- 提出期限は、「課題その2」と合わせて7月21日(木)の24時とする。
- 提出方法に関しては、「課題その2」と合わせて7月15日(金)に詳細を告知する。

## 問題 1

万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

を用いて、惑星の軌道を計算することを考えてみよう。

簡単のため、考える系における支配的な力は万有引力のみであるとする。いま、質量が  $m_1$  である中心星と、質量が  $m_2$  である惑星のみで構成される惑星系を考える。また中心星及び惑星の位置はベクトル  $r_1, r_2$  で表されるとする。以下では  $\dot{x} = dx/dt, \ddot{x} = d^2x/dt^2$  とする。

1. 慣性系において、中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式を書け。またそれらから

$$\ddot{r} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}r$$

を導出せよ。ここで  $r$  は  $r = r_2 - r_1$  で表される相対ベクトルとする。このとき、上記運動方程式で表される運動がどのようなものかを考察せよ。

2. 1. の運動方程式を成分に分けることを考えよう。

簡単のため、二体は同一平面上を運動しているとする。相対ベクトル  $r = (x, y)$  に対して、速度を

$$v \equiv (v_x, v_y) = (\dot{x}, \dot{y})$$

と定義する。このとき、 $\dot{v}_x$  と  $\dot{v}_y$  を  $x, y$  を用いて表せ。

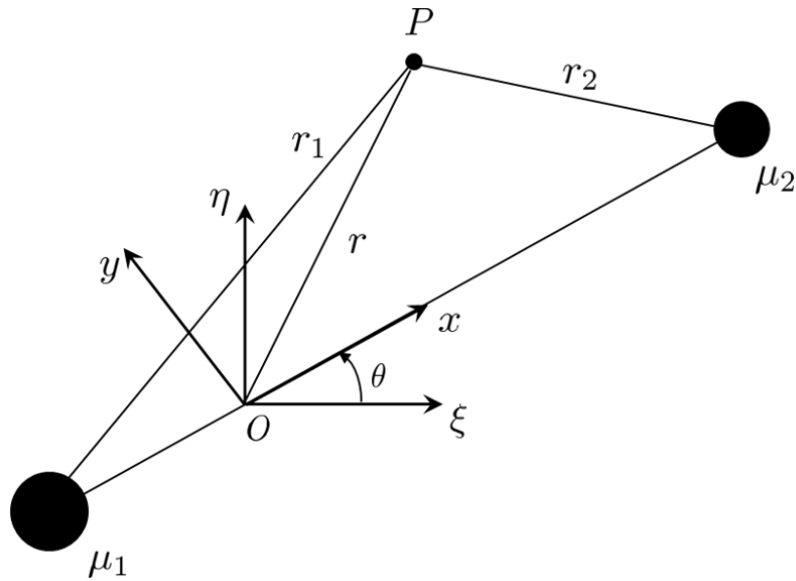
## 問題 2

次に、3体問題を考える。ここでは、質量  $m_1$  の中心星の周りを質量  $m_2$  の惑星が円運動し、3つ目の天体  $P$  は中心星と惑星に対して質量が無視できるような粒子であるとする（円制限三体問題）。問題 1 と同様、3つの天体は同一平面上を運動しているとする。このとき、中心星と惑星の座標をそれぞれ  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$  とすると、重心  $O$  を原点とした慣性座標系  $(\xi, \eta)$  での粒子の運動方程式の各成分は、

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\ \ddot{\eta} &= \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}\end{aligned}$$

で表わされる。 $r_1, r_2$  はそれぞれ粒子と中心星および惑星との距離、 $\mu_1 = Gm_1, \mu_2 = Gm_2$  である。簡単化のため、 $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1$ 、中心星と惑星との距離  $r = 1$  としている。この運動方程式を、中心星と惑星が静止しているような回転座標系  $(x, y)$  で表わしてみよう。

いま、二つの座標系の原点は一致し、 $m_1$  と  $m_2$  は常に  $x$  軸上にあるとする。また、時刻  $t = 0$  で  $\xi$  軸と  $x$  軸は一致しているとする。



1. 二つの座標系の原点が中心星と惑星の重心であることをふまえて、回転系でのそれぞれの座標  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$  を  $\mu_1, \mu_2$  を用いて表わせ。
2. 中心星と惑星は、慣性系において角速度  $\omega$  で回転しているとする。このとき、時刻  $t$  における  $\xi$  軸と  $x$  軸のなす角度  $\theta$  を求めよ。  
また、それを用いて、 $(\xi, \eta)$  を  $(x, y)$  で表わす変換式を求めよ。
3. 2. の式を時間で二回微分することにより、慣性系での加速度の成分  $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}$  を、回転系での成分  $\ddot{x}, \ddot{y}$  などを用いて表わせ。
4. 以上の結果と与式から、回転系における粒子  $P$  についての運動方程式

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = - \left[ \mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right]$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y$$

を導出せよ。

5. 力を  $F = \nabla U$  のように表わす量  $U$  を、力のポテンシャルとよぶ。4. に現れる力のポテンシャルは、

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$$

と表わされることを用いて、4. で求めた方程式を  $U$  を用いて表わせ。

6. 5. で得られた結果の  $x$  成分に  $\dot{x}$  を、 $y$  成分に  $\dot{y}$  をかけて足し合わせ、時間について積分することで現れる積分定数  $C_J$  (円制限三体問題における保存量であるヤコビ定数) を求めよ。