

数値計算実習課題その1

藤田 哲也 宇宙物理学研究室 B4

1

万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

をベクトルで表すと、

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \quad (1)$$

となる。中心星が惑星から受ける力を F_1 、惑星が中心星から受ける力を F_2 とする。 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ より、 $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ なので、(1) より、 F_1 と F_2 はそれぞれ

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}$$

となる。よって、慣性系における中心星と惑星の運動方程式は、それぞれ

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} = m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} = m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} \quad (3)$$

と書ける。 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ より、両辺 t の二階微分をとると、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}$$

となるので、これに (2) と (3) を代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{Gm_2}{r^3}\mathbf{r} - \frac{Gm_1}{r^3}\mathbf{r} \\ &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r} \end{aligned}$$

これは相対ベクトルを用いて表された運動方程式であり、中心星から見たときの惑星の相対運動を表している。原点に質量 $m_1 + m_2$ の天体が存在し、それに対して質量が無視できるほど小さい天体の運動と考えることもできる。これを数値的に解くことで、中心星に対して惑星がどのような軌道で運動するかがわかる。

2

速度の定義より、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right)$$

である。これと $r = (x, y)$ を用いると、1. の結果より、

$$\left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x + y)^{3/2}}(x, y)$$

と表せる。よって、それぞれの成分は、

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x + y)^{3/2}}x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x + y)^{3/2}}y$$