

# ITPASS 数値計算実習課題その 1

地球惑星科学科 3 回生 津田彰子

2010 年 6 月 25 日 ( 金 ) 出題分

## 1 ベクトル表示の運動方程式

### 1.1 慣性系における、中心星と惑星に成り立つ運動方程式

万有引力の法則は

$$F = -G \frac{mM}{r^2} \quad (1)$$

であるためこれを用いると、

中心星における運動方程式は

$$\vec{F}_{\text{中}} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (2)$$

となる。同様に、惑星における運動方程式は

$$\vec{F}_{\text{惑}} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (3)$$

となる。なお、中心星の質量を  $m_1$ 、位置ベクトルを  $\vec{r}_1$ 、惑星の質量を  $m_2$ 、位置ベクトルを  $\vec{r}_2$  とした。

### 1.2 相対ベクトルを用いた運動方程式

(1) の両辺を  $m_1$  で割ると

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = G \frac{m_2}{r^3} \vec{r} \quad (4)$$

となる。また、(2) の両辺を  $m_2$  で割ると

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} \quad (5)$$

となる。なお、 $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  の相対ベクトルとしている。ここで、

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \quad (6)$$

であるので、(5)-(4) より

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (7)$$

が導出される。また、この運動方程式は、2 体の天体がケプラー運動をしていることが分かる。

## 2 運動方程式の成分表示

1 で求めた運動方程式を成分に分けることを考える。 $\vec{r} = (x, y)$ 、 $\vec{v} = (v_x, v_y)$  であることから

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x \quad (8)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y \quad (9)$$

となる。