ITPASS 数値計算実習課題その 1

joho11　金野 圭祐

平成 22 年 7 月 15 日

解答

1

中心星と惑星の質量をそれぞれ m_1,m_2, 位置ベクトルを $\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2$ と定義する. また, 中心星に働く力を $\mathbf{F}_1$, 惑星に働く力を $\mathbf{F}_2$ とすると, 万有引力の法則より,

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2}\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$$

となり, 相対ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $|\mathbf{r}| = r$ を用いて書き換えると,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}$$

と表せる. よって中心星, 惑星それぞれの運動方程式は以下のようになる.

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

(1) の両辺を m_1, (2) の両辺を m_2 で割ると,

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_2}{r^3}\mathbf{r} \quad , \quad \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^3}\mathbf{r}$$

となり, 両式の差をとると,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\right) = -\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{r^3}\mathbf{r}$$

すなわち,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

が得られる.(3) は中心星に対する惑星の相対ベクトルで表されているため, この二体問題は中心星を原点としたときの惑星の一体問題として扱うことができる。

2

相対ベクトル $\mathbf{r}$ を x 軸, y 軸方向の単位ベクトルを用いて $\mathbf{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ と表す.
また, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ なので (3) は,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\right) = -\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\right)$$

すなわち,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}\right) = -\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\right)$$

となり, 中心星に対する惑星の速度は $\left(v_x, v_y\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ で表せるので,

$$\frac{d}{dt}\left(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}\right) = -\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\right)$$

と書ける. したがって,

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}x \tag{4}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}y \tag{5}$$

と表せる.