

ITPASS 数値計算実習課題その1

宇宙物理学研究室 B4 坂本大樹

問題

1.

中心星に働く力を \mathbf{F}_{12} とすると中心星の運動方程式は、

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

惑星に働く力を \mathbf{F}_{21} とすると惑星の運動方程式は、

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

中心星と惑星の相対座標は、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

両辺を時間 t で二階微分すると、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

以上より、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \dots (*)$$

\mathbf{r} は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ で表される相対ベクトルとすると、(*) 式は中心星から見た惑星の運動を表していると考えられる。

ここで、(*) 式の右辺を変形すると

$$-\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)$$

よって (*) 式は以下のように表せる。

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{G m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}$$

$\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \mu$ と置くと (*) 式は、

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{G m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}$$

したがって、上記の運動方程式から中心星に対する惑星の運動は、中心星を固定し惑星の質量を μ と置いて考えた時の運動と等しいということが考えられる。

2.

相対ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ に対して速度を

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

と定義すると、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

また、

$$\left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

1. から、

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \left(- \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} x, - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} y \right)$$

$$= \left(- \frac{G(m_1 + m_2)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}} x, - \frac{G(m_1 + m_2)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}} y \right)$$

よって、

$$\left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) = \left(- \frac{G(m_1 + m_2)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}} x, - \frac{G(m_1 + m_2)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}} y \right)$$