

# ITPASS 数値計算実習課題その1

宇宙物理学研究室 B4 坂本大樹

## 問題

1.

中心星の運動方程式

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

惑星の運動方程式

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

中心星と惑星の相対座標は、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

両辺を時間  $t$  で二階微分すると、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

$$= -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

よって、

$$-\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

以上より、

$$-\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r}$$

ここで、 $\mathbf{r}$  は  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  で表される相対ベクトルとすると、上記の運動方程式は質点  $m_1$  から質点  $m_2$  の相対運動と考えられる。したがって、今回の場合は上記の運動方程式は、中心星から惑星の相対運動を表していると言える。

2.

相対ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y)$  に対して速度を

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

と定義すると、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1. から、

$$\begin{aligned} \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) &= \left( \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} x, \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} y \right) \\ &= \left( \frac{G(m_1 + m_2)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}} x, \frac{G(m_1 + m_2)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}} y \right) \end{aligned}$$

よって、

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left( \frac{G(m_1 + m_2)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}} x, \frac{G(m_1 + m_2)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}} y \right)$$