

ITPASS 数値計算実習課題その1 二体問題

平成 21 年 12 月 18 日

学籍番号・名前 : 箕浦 舞
担当情報実験機名 : johoh05

1 中心星・惑星間の運動方程式

運動方程式の一般形は

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F \quad (1)$$

であり、中心星・惑星それぞれについて運動方程式を表す。

今、このふたつしか存在しない系を考えるので F は万有引力のみとなり、また相対ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ とすると

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3)$$

となる。ここで (2) 式と (3) 式の差をとると、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4)$$

となるので、与式を導き出すことができる。

2 成分に分解

1 を成分 x, y に分解する。

(1) の運動方程式に $\mathbf{r} = (x, y)$ を代入して、

$$\frac{d^2}{dt^2}(x, y) = -\frac{Gm_1 m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{Gm_1 m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \quad (6)$$

ここで、与えられた定義 $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = (v_x, v_y)$ より

$$\frac{d}{dt}(v_x, v_y) = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \quad (7)$$

ゆえに

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y \quad (8)$$

となる。