ITPASS 数値計算実習課題　二体問題

joho07　後藤 陽香

平成 21 年 12 月 18 日

1　中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式

質量 m_1 の中心星および質量 m_2 の惑星のみで構成される惑星系を考える。
中心星の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1$ 、惑星の位置ベクトルを $\mathbf{r}_2$ で表す。
考える系における支配的な力は万有引力

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

のみであるので、中心星に働く力 $\mathbf{F}_{12}$ と惑星に働く力 $\mathbf{F}_{21}$ は

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{\mid \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \mid^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{2}$$

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{\mid \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \mid^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{3}$$

ここで相対ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ を定義すると
中心星における運動方程式は

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}$$

$$\therefore\ m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{4}$$

であり、両辺を m_1 で割ると

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{5}$$

同様に、惑星における運動方程式は

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21}$$

$$\therefore\ m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{6}$$

であり、両辺を m_2 で割ると

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^3}\mathbf{r} \tag{7}$$

(7) 式 - (5) 式より

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \\ \therefore\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \end{aligned} \tag{8}$$

2 成分に分ける

1 の運動方程式を (x, y) 成分に分ける。
(8) 式に $\mathbf{r} = (x, y)$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(x, y) &= -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \\ \therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) &= -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \end{aligned} \tag{9}$$

ここで、

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \tag{10}$$

より (9) 式は、

$$\frac{d}{dt}(v_x, v_y) = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \tag{11}$$

すなわち、

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G(m_1+m_2)\,x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{12}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{G(m_1+m_2)\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{13}$$