

ITPASS 数値計算実習課題その 1 (2009 年 7 月 3 日 (金) 出題)

惑星の軌道計算をする準備として、2 体問題に関する簡単な問題を解いてみましょう。解答はにあたっては次のことに注意してください。

- 解答は $\text{T}_\text{E}\text{X}$ で作成し、 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ のソースファイルと PDF ファイルを提出すること。
- 7 月 17 日 (金) に出題される「課題その 2」と合わせて提出すること。「課題その 2」については 7 月 17 日 (金) に詳細を告知する。
- 提出期限は、「課題その 2」と合わせて 8 月 10 日 (月) の 17 時とする。
- 提出方法に関しては、「課題その 2」と合わせて 7 月 17 日 (金) に詳細を告知する。

問題

万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

を用いて、惑星の軌道を計算することを考えてみよう。簡単のため、考える系における支配的な力は万有引力のみであるとする。いま、質量が m_1 である中心星と、質量が m_2 である惑星のみで構成される惑星系を考える。また中心星及び惑星の位置はベクトル \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 で表されるとする。

1. 中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式を書け。またそれらから

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r}$$

を導出せよ。ここで \mathbf{r} は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ で表される。相対ベクトルとする。このとき、上記運動方程式で表される運動がどのようなものかを考えよ。

2. 1. の運動方程式を成分に分けることを考えよう。相対ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ に対して、速度を

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

と定義する。このとき、 $\frac{dv_x}{dt}$ と $\frac{dv_y}{dt}$ を x 、 y を用いて表せ。