第4章　大気の波動運動パート2

4.1　イントロダクション

この章では,「大気の波動運動パート1」で取り扱われたよりもより複雑な波動運動を取り扱う. 大気の波動擾乱は, 特定の流れの場の不安定, 直接的な強制, 非線形相互作用を起源とする. 順圧不安定は, 風の基本場の水平シアを原因にする. これは, 流体力学において研究された「流体不安定」(Lin, 1955) の一形式である. 一方で, 傾圧不安定は風の基本場の鉛直シアあるいは温度風の関係を介した水平温度勾配と関係している. この不安定は地球の自転と関係していて, 気象学や海洋学を除いて広くは研究されていない. 順圧や傾圧の効果は大気中で一緒に発生するが, 簡単のためにこれらを別々に研究することにしよう. 熱帯の赤道付近では, 高緯度のロスビー波あるいは慣性重力波とは全く異なる大規模な波動が存在し得る. f が赤道上でゼロになるという事実は, 上の2つの波の特徴を混合したような波の存在を可能にし, また特定の種類の擾乱を赤道付近に捕捉する傾向がある.

4.2 帯状流中のロスビー波

ベータ平面に対する順圧渦度方程式は次のように書かれる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla(\zeta + \beta y) = 0 \tag{4.2.1}$$

ここで,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{4.2.2}$$

である. (4.2.1) は, 準地衡風ポテンシャル渦度方程式 (3.3.66) において温度摂動 $R^{-1}\partial\Phi'/\partial Z$ がゼロであるか, もしくは静的安定度 Γ が非常に大きい場合を考えたときに得られる. 順圧渦度方程式は, 剛体でできた 2 つの水平面の間にはさまれた均質流体や $F \ll 1$ のときの自由表面モデルに対して適切である (第 3.2 節参照). 第 7 章では, 相当順圧モデルが紹介されるだろう. このモデルは, ジオポテンシャルと温度が圧力のみの関数によって関係付けられる (順圧) ということを仮定する. この仮定の結果, (4.2.1) は近似的に相当順圧構造である 500 hPa 面において適用される. 事実, 500 hPa において (4.2.1) を用いた数値予報が 1949 年に行われ, 数値予報の可能性が示唆された.

順圧不安定の問題を調べるために, 緯度方向にのみ変化する帯状流 $U = U(y)$ を考えよう. 依存変数を次のように分割する.

$$\zeta = \bar{\zeta}(y) + \zeta', \quad u = U(y) + u' \quad v = v'$$

ここで, $\bar{\zeta} = -d\bar{U}/dy$ である. これらを (4.2.1) に代入し, 方程式を線形化すれば

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + U\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v'\left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + \beta\right) = 0 \tag{4.2.3}$$

を得る. 水平速度の擾乱成分に対して流線関数 ψ を導入すれば, $u' = -\partial\psi/\partial y$, $v' = \partial\psi/\partial x$ と書くことができる. このとき, (4.2.2) が自動的に満たされる. これらの関係式を使えば, (4.2.3) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi + U\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi + \left(\beta - \frac{d^2U}{dy^2}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{4.2.4}$$

となる. ここで, $\psi = \Psi(y)\ e^{ik(x-ct)}$ の形式をもった摂動 (ノーマルモード解と呼ばれる) を考えることにする. これを (4.2.4) に代入すれば,

$$(U-c)\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2} - k^2\Psi\right) - \left(\frac{d^2U}{dy^2} - \beta\right)\Psi = 0 \tag{4.2.5}$$

を得る．さらに, $y=0$ を中心とする有限幅の帯状流を仮定し, また南北境界 ($y=\pm d$) は剛体境界であるとしよう．これらの境界において境界に対して法線方向の速度成分はゼロでなければならないので,

$$v(\pm d)=\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=\pm d}=ik\ \Psi(\pm d)\ e^{ik(x-ct)}=0$$

である．よって,

$$\Psi(d)=\Psi(-d)=0 \tag{4.2.6}$$

であるならば, 境界条件は満たされる．境界条件 (4.2.6) が課された (4.2.5) は, c に対する固有値問題となる．

$U=U(y)$ である一般的な場合を取り扱う前に, U が定数の場合を考えておくと役に立つ．この場合には, (4.2.5) は

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2}-\left(k^2-\frac{\beta}{U-c}\right)\Psi=0 \tag{4.2.7}$$

となる．境界条件 (4.2.6) を考慮すれば, 上の方程式は次の形式の解を持つ．

$$\Psi_n=A\cos\left[\frac{(2n-1)\pi y}{2d}\right]\quad n=1,2,\ldots \tag{4.2.8}$$

ここで, $[(2n-1)\pi/2d]^2=-k^2+\beta/(U-c)$ である．このとき, 位相速度は

$$c=U-\frac{\beta}{k^2+[(2n-1)\pi/2d]^2} \tag{4.2.9}$$

となる．これは南北方向に有限な領域に存在する非発散ロスビー波であり, 第 2.5 節の浅水系におけるロスビー波解と比べられ得る．(4.2.8) で与えられる Ψ_n の解はそれらを足し合わすことで任意の初期状態を表現できるために, 完全な系を構成する．$n=1$, $d\to\infty$ に対しては, この位相速度の式は

$$c=U-\beta/k^2 \tag{4.2.10}$$

となる．この式は, $\partial\bar{q}/\partial y$ を (2.6.53) 使って評価するとき, (2.6.52) と比べられ得る．第 2 章の浅水系におけるロスビー波の議論では自由表面を許容したので, (2.6.52) と (2.6.53) を組み合わせることによって得られる位相速度は (4.2.10) とは異なる．しかし, これらの余分な項は (2.6.52) の分母において水平スケール L が十分に大きくない限り重要ではない[*1]．以前に, ロスビー波は平均流 U に対して $\boldsymbol{k}\times\nabla\bar{q}$ の方向に

[*1] (2.6.52) と (2.6.53) を組み合わせることによって得られる位相速度は

$$c=U-\frac{\beta+U/L_R^2}{k^2(1+L^2/L_R^2)} \tag{4.2.11}$$

である．ここで, $L_R=(gH)^{1/2}/f$ はロスビーの変形半径であり, $L=k^{-1}$ である．

ここで $U\sim 10$ m と見積り, また $L_R\gg L\sim 10^6$ m の場合を考えるならば, 上の式の近似は (4.2.10) と一致する．

伝搬するということが示唆された((2.6.52) を参照). 今 $\bar{q} = (f + \bar{\zeta})/H_0 = f/H_0(H_0$ は定数) であるので, ポテンシャル渦度の南北勾配 $\nabla\bar{q}$ は北を向いている. よって, ロスビー波は平均流と相対的に西方に伝搬することになり, (4.2.10) の結果と一致する. (4.2.10) の式は Rossby(1939) によって初めて導かれたが, 球面座標における解は, ラプラスの潮汐方程式に対する一解としてそれよりずっと昔に得られていた (Hough, 1898). $U > 0$ かつ波長が $\lambda = \lambda_s = 2\pi(U/\beta)^{1/2}$ であるとき, この位相速度の式は定常解を許容する. $L < \lambda_s$ のときロスビー波は東へ伝播する一方で, $L > \lambda_s$ のときは西方へ伝播する. 500 hPa における総観規模の擾乱はおおよそ (4.2.10) で与えられる速度で移動するが, 超長波には (4.2.10) によって示唆されるような西方への急速な伝搬が見られない.

4.3 順圧不安定の条件

この節では順圧不安定が発生する必要条件を導き, さらにエネルギー方程式を求める. $\psi = \Psi(y)e^{ik(x-ct)}$ のタイプの摂動が不安定となるためには, 位相速度が複素数とならなければならない. つまり $c = c_r + ic_i$ であり, 振幅の関数 Ψ もまた一般的には複素関数であろう. 次に, (4.2.5) に Ψ の複素共役 (Ψ^* とする) を掛ければ,

$$(U-c)\left(\Psi^*\frac{d^2\Psi}{dy^2} - k^2\Psi^*\Psi\right) - \left(\frac{d^2U}{dy^2} - \beta\right)\Psi^*\Psi = 0 \tag{4.3.12}$$

となる. 最初の項は微分のチェーンルールによって,

$$\Psi^*\frac{d^2\Psi}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dy}\right) - \frac{d\Psi^*}{dy}\frac{d\Psi}{dy}$$

と変形できる. また, 複素量とその共役複素量の積はその複素量の絶対値の 2 乗となる.

$$\Psi\Psi^* = |\Psi|^2 \quad \text{and} \quad \frac{d\Psi^*}{dy}\frac{d\Psi}{dy} = \left|\frac{d\Psi}{dy}\right|$$

これらの結果を利用し, さらに (4.3.12) を $U - c$ で割り $\pm d$ の間で積分すれば

$$\begin{aligned}\int_{-d}^{d}\left[\frac{d}{dy}\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dy}\right) - k^2|\Psi|^2 - \left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^2\right]dy \\ = \int_{-d}^{d}\frac{(d^2U/dy^2 - \beta)\,|\Psi|^2}{U-c}dy\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

を得る. 境界条件から $\Psi(\pm d) = 0$ となるので, $\Psi(\pm d)$ の実部と虚部は別々にゼロとならなければならない. よって, Ψ と同様に Ψ^* は境界においてゼロとなり, 左辺第

1 項目の積分はゼロとなる．さらに右辺において分母分子に $(U-c)^* = (U-c_r)+ic_i$ を掛けて変形すれば，

$$\int_{-d}^{d}\left[k^2|\Psi|^2+\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^2\right]dy = -\int_{-d}^{d}\frac{(d^2U/dy^2-\beta)(U-c_r)|\Psi|^2}{|U-c|^2}dy - ic_i\int_{-d}^{d}\frac{(d^2U/dy^2-\beta)|\Psi|^2}{|U-c|^2}dy \tag{4.3.14}$$

となる．左辺と右辺第 1 項は実数なので，この方程式の両辺において実部と虚部がそれぞれ等しくなるためには，i の係数部分がゼロとなる必要がある．

$$c_i\int_{-d}^{d}\frac{(d^2U/dy^2-\beta)|\Psi|^2}{|U-c|^2}dy = 0 \tag{4.3.15}$$

増幅する波が存在するならば $c_i \neq 0$ であるので，c_i の係数の積分がゼロとなる必要がある．この積分がゼロとなるためには，$d^2U/dy^2-\beta$ という量が $-d<y<d$ の領域において**少なくとも一度は符号を変化させなければならない**．よって，**順圧不安定に対する必要条件**は y のいくつかの値 (これを y_k とする) において

$$\left(\frac{d^2U}{dy^2}-\beta\right)_{y_k} = 0 \quad -d<y_k<d \tag{4.3.16}$$

となることである．

この定理はもともと非回転系に対して Lord Rayleigh(1880) によって導かれたが，H.L.Kuo(1951) は，自転する地球への気象学的な応用としてベータ項を付け加えることによりこの定理を拡張した．条件 (4.3.16) は次のような形式で書くことができる．

$$\frac{d}{dy}(-\frac{dU}{dy}+f) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\zeta_a}{dy} = 0 \quad \text{at} \ \ y = y_k \tag{4.3.17}$$

この式は，順圧不安定が発生するためには，基本流の中のいくつかの点において絶対渦度が極大あるいは極小にならなければならないことを述べている．

順圧不安定についてのより多くの情報は，線形な擾乱に対するエネルギー方程式を導くことによって得られる．(4.2.4) に $-\psi$ を掛けて，x, y に対して積分すれば

$$\int_{-d}^{d}\overline{\left[-\psi\nabla\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi - U\psi\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi^2}{2}\right)\left(\beta-\frac{d^2U}{dy^2}\right)\right]}dy = 0 \tag{4.3.18}$$

となる．ここで，$\overline{(\ )} = L^{-1}\int_0^L(\ \ )\,dx$ とした．東西境界に対して周期境界条件，南北境界に対して滑りなし条件を課すことにする．すなわち，

$$\psi(x+L,y,t) = \psi(x,y,t) \tag{4.3.19}$$

$$\psi(x,d,t) = \psi(x,-d,t) = 0 \tag{4.3.20}$$

である. (4.3.18) のいくつかの項に対して部分積分を実行し, 境界条件 (4.3.19) を適用すれば, 次のようなエネルギー方程式を得る[*2].

$$\frac{d}{dt}\int_{-d}^{d}\overline{\frac{u'^2+v'^2}{2}}\,dy = -\int_{-d}^{d}\overline{u'v'}\,\frac{dU}{dy}\,dy \tag{4.3.21}$$

ここで, $u' = -\partial\psi/\partial y$, $v' = -\partial\psi/\partial x$ である. この方程式の右辺は, 次のように ψ を表現することによって決定することができる.

$$\psi(x,y,t) = \Phi(y,t)\ \cos[kx-\theta(y,t)] \tag{4.3.22}$$

ここで, Φ は複素振幅であり, θ は位相である. このとき運動量フラックス $\overline{u'v'}$ は次のように書かれる.

$$\begin{aligned}\overline{u'v'} &= -\overline{\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}}\\ &= \Psi^2\frac{\partial\theta}{\partial y}k\,\overline{\sin^2(kx-\theta)} + k\frac{\partial\Psi}{\partial y}\Psi\,\overline{\sin(kx-\theta)\ \cos(kx-\theta)}\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

三角関数の諸公式を導入し, L が $2\pi/k$ の倍数であるという条件を課せば, 運動量フラックスは

$$\overline{u'v'} = \frac{k}{2}\Psi^2\frac{\partial\theta}{\partial y} \tag{4.3.24}$$

となる. これにより, $\overline{u'v'}$ の符号は波の位相の緯度方向の傾き $\partial\theta/\partial y$ によって決定されることが示される. (4.3.24) を使えば, エネルギー方程式 (4.3.21) は

$$\frac{d}{dt}\int_{-d}^{d}\overline{\frac{u'^2+v'^2}{2}}\,dy = -\frac{k}{2}\int_{-d}^{d}\Psi^2\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dU}{dy}\,dy \tag{4.3.25}$$

この方程式は, $(\partial\theta/\partial y)(dU/dy) < 0$ である (擾乱の位相の緯度方向の傾きと平均流の南北シアの符号が逆符号である) とき擾乱は成長する一方で, $(\partial\theta/\partial y)(dU/dy) > 0$ である (同じ意味で同符号である) とき擾乱は減衰することを示している.

4.4 順圧不安定なプロファイル

この章では, 特定の大気の平均流を近似的に表現する 2 種類の風のプロファイルの安定性を考えよう. ジェットを表現するようなプロファイルを

$$U = U_0\,\mathrm{sech}^2(y/y_0), \tag{4.4.26}$$

[*2] 「付録: 擾乱の運動エネルギーの方程式 (4.3.21) の導出」を参照.

シア領域を表現するプロファイルを

$$U = U_0 \tanh^2(y/y_0) \tag{4.4.27}$$

のように与えることにする．ジェットのプロファイル (4.4.26) は, Bickley ジェットとして知られている．これらの風の場は図 4.4.1 と図 4.4.2 に示されている．(4.4.26) と同様な西風ジェット ($U_0 > 0$) は, 中緯度の上層ではほとんどいつも存在する．東風ジェット ($U_0 < 0$) は熱帯において特定の時期に発生し, (4.4.27) と同様なシア領域は熱帯収束帯において発生する．図 4.4.1 と図 4.4.2 において d^2U/dy^2 は符号を変化させるので, もし $\beta = 0$ ならば, 両方の風のプロファイルは不安定の必要条件 (4.3.16) を明らかに満たす．一般的には, 不安定の必要条件は

$$\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_{\max} > \beta \quad \text{and} \quad \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_{\min} < \beta \tag{4.4.28}$$

と書かれる．U の 3 階微分をゼロとおいて $(d^2U/dy^2)_{\max}$ や $(d^2U/dy^2)_{\min}$ を求めることによって, この条件は 2 種類の風のプロファイル図 4.4.1 と図 4.4.2 に対して評価される．Bickley ジェットに対する不安定の必要条件は,

$$-2 < b < 2/3 \tag{4.4.29}$$

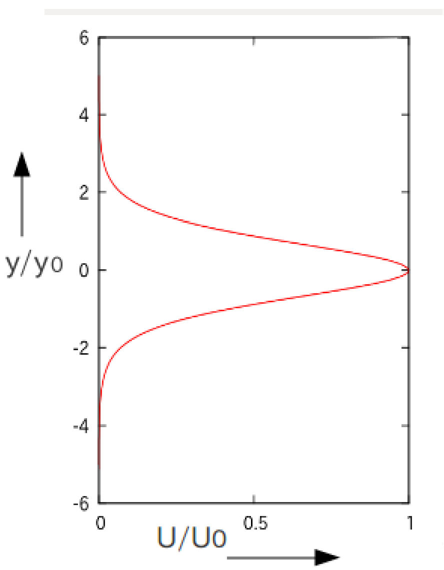

図 4.4.1: $U = U_0 \mathrm{sech}^2\ y/y_0$

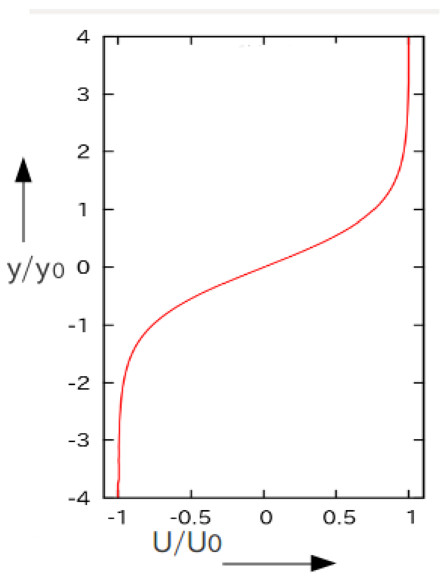

図 4.4.2: $U = U_0 \tanh\ y/y_0$

であることが求まる．ここで，

$$b = \beta y_0^2/U_0 \tag{4.4.30}$$

である．一方，シア領域のプロファイルに対する必要条件は

$$|b| < 4/(3\sqrt{3}) \tag{4.4.31}$$

であることが求まる．(4.4.26) と (4.4.27) に対する固有値問題 (4.2.5) は，b と ky_0 の特定の値に対して中立解がいくつか発見されている以外は解析的には解かれていない．Kuo(1973) は，(4.2.5) を数値的に積分し，その際に境界条件 (4.2.6) を満たす c を探すことによって (4.4.26) と (4.4.27) に対する固有値問題を解いた．

図 4.4.3 は，Kuo(1973) によって得られた，境界を無限遠まで移動させた ($d \to \infty$) ときの Bickley ジェット (4.4.26) に対する無次元の固有値 c_r/U_0 と $\delta = ky_0c_i/U_0$ を示している．$b > 0$ が西風ジェット，$b < 0$ が東風ジェットに対応している．図 4.4.3 の (a) から次のようなことが読み取れる．西風ジェット ($b > 0$) に対して不安定波の位相速度は東向きであり，その大きさはジェットの最大速度 U_0 の約 50%以下である．一方，東風ジェット ($b < 0$) に対する不安定波の位相速度は西向きであり，その大きさはジェットの最大速度 U_0 の 2.5 倍を超える．これはロスビー波の効果であり ((4.2.11) を参照)，b を固定したとき波長が最大に近づく ($k \to 0$) につれて，c_r はより大きな西向きの速度をもつことに注意されたい．図 4.4.3 の (b) は，不安定領域が予期されたように $-2 < b < 2/3$ の範囲に制限されることを示している．β の存在は，実際東ジェット中の擾乱をより不安定にさせる．しかしながら，ベータ効果が (b を介して) 十分に大きいときには運動は安定である．さらに図から示唆されることは，最も不安定な擾乱の波長が東風ジェットと西風ジェットの両方において $|b|$ の増加とともに大きくなることである．

図 4.4.4 は，シア層 (4.4.27) に対する (Kuo(1973) によって得られた) 無次元の固有値を示している．(4.4.31) によって示されるように，シア領域のプロファイルの場合には位相速度や成長率は基本流の方向に依存しない．図 4.4.4 の (a) が示唆することは，$c_r = 0$ となる $b = 0$ の場合を除いて，すべての不安定波は西の方向へ伝搬するということである．最大の $|c_r|$ は風速の最大値 U_0 の約 90%ほどであり，原点近くを除けば固定された b に対して $|c_r|$ は波長とともに増加する．図 4.4.4 の (b) は，最も不安定な波が $b = 0$ において最大の成長率を持ち，その成長率は $b = 4/(3\sqrt{3})$ でゼロまで減少することを示している．最も不安定な波の波長は，b が増加するにつれて減少する．これは Bickley ジェットにも見られた特徴である．原点近くの不安定領域は，ベータ効果によって引き起こされたように思われる．

順圧不安定な波の構造を調べることは有用である．ここで示される結果は，Williams et al(1971) によって $U_0 > 0,\ b = 0,\ d = 5y_0$ に対して計算されたものである．図 4.4.5 は，Bickley ジェットに伴う最も不安定な波 ($ky_0 = 0.9$) の振幅と位相を表して

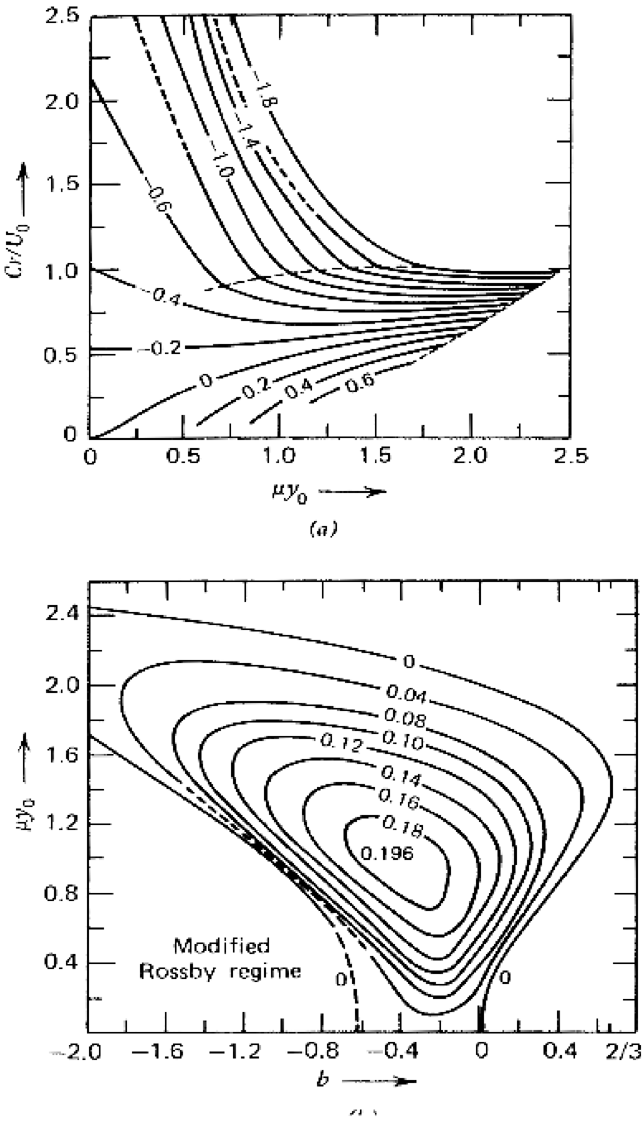

図 4.4.3: Kuo(1973) による $U = U_0\mathrm{sech}^2\ (y/y_0)$ に対する固有値. (a)ky_0 と c_r/U_0 の関数として見たときの b のグラフ; (b)b と無次元波数 ky_0 の関数として見たときの成長率 δ. (H.L.Kuo, *Dynamics of Quasi-geostrophic Flows.* Academic Press, 1973.)

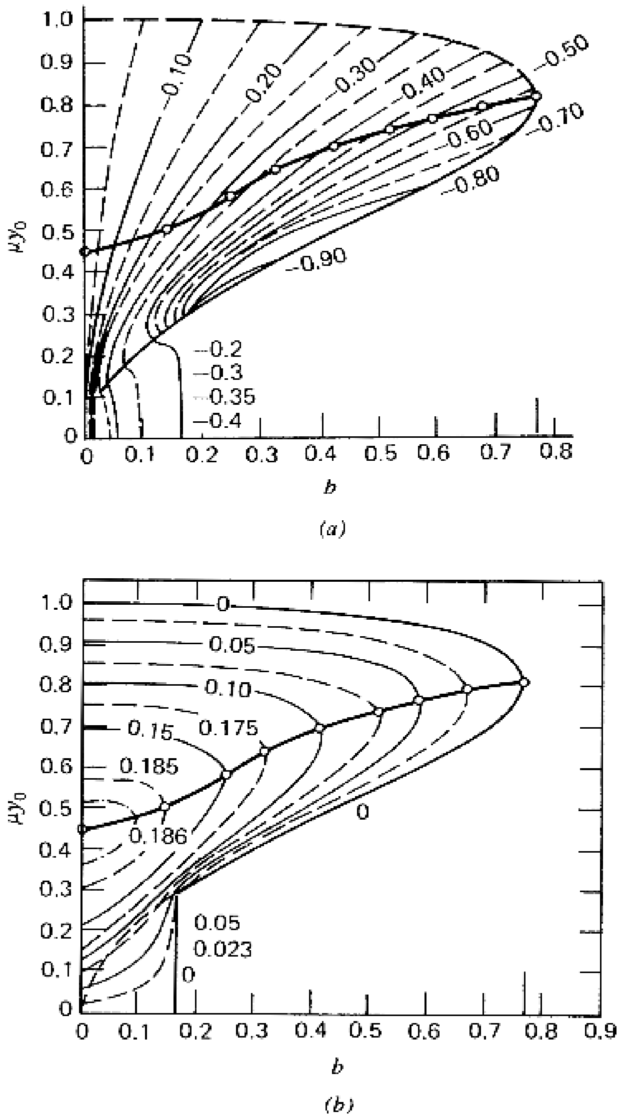

図 4.4.4: Kuo(1973) による $U = U_0\tanh\,(y/y_0)$ に対する固有値. (a)b と ky_0 の関数として見たときの $c_r/|U_0|$ のグラフ; (b)b と ky_0 の関数として見たときの成長率 δ のグラフ. (H.L.Kuo, *Dynamics of Quasi-geostrophic Flows.* Academic Press, 1973.)

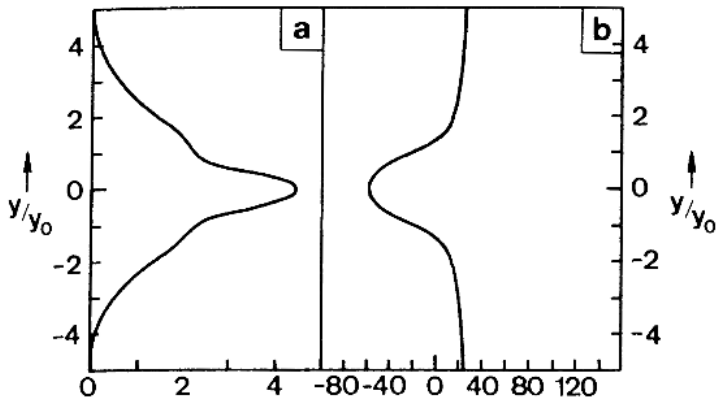

図 4.4.5: Bickley ジェットに対する最も不安定な解の構造. (a) 振幅 P のグラフ; (b) 位相 θ のグラフ (横軸の単位は度). (Haltiner,G.J., Williams,R.T., 1979 : NUMERICAL PREDICTION AND DYNAMIC METEOROLOGY SECOND EDITION. *John Wiley & Sons*, 477pp)

いる. 解は $\psi = P(y)\cos(k(x - c_r t) - \theta(y))$ と書かれ, $P(y)$ は振幅の構造, θ は位相角を与える. この図から $y = 0$ で振幅は最大となり, 境界に近づくにつれて滑らかにゼロまで減衰することが分かる. 位相は波がシアに対して反対に傾いていることを示し, (4.5) はもし擾乱が成長するならばこの位相の関係が必要条件であることを述べている. この一般的な位相の振る舞いは, 全ての順圧的な不安定ジェットに対して予期され得る.

図 4.4.6 は, $U_0 > 0,\ b = 0$ に対するシア層に伴う最も不安定な波 ($ky_0 = 0.45$) の振幅と位相を表しいる. この図は, $y = \pm y_0$ において振幅は最大となり, $y = 0$ では極小になることを示している. 位相の傾きはジェットのシアに対して反対であり, このことはもし擾乱が成長するならばやはり必要である (次節も参照).

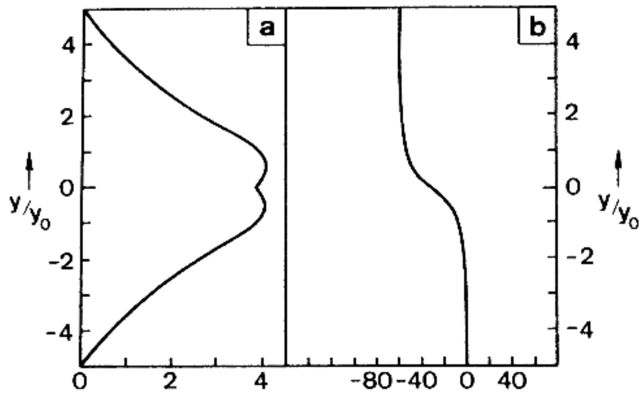

図 4.4.6: シア層 (4.4.27) に対するの図 4.4.5 と同様のグラフ. (Haltiner,G.J., Williams,R.T., 1979 : NUMERICAL PREDICTION AND DYNAMIC METEOROLOGY SECOND EDITION. *John Wiley & Sons*, 477pp)

4.5 線形シア

線形な水平シアを伴う流れの中に, 不安定が存在するかどうかに疑問を持つことは自然である. 順圧不安定を議論する手法は, 明らかに以前に使われたものとは異なるであろう. なぜならば, $\beta = 0$ のときの線形シアを考える場合に, 境界条件 (4.2.6) を満たすような (4.2.5) に対する**ノーマルモード**は存在しない.

代替的な手法は, 問題を初期値問題として取り扱うことである. 議論を簡単にするために (4.2.3) において地球の自転の効果 (β を含む項) を無視し, $U = U_0 + Sy$ であると仮定しよう. このとき, (4.2.4) は

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0 \qquad (4.5.32)$$

となる. この方程式の解は次の形式を持つ.

$$\nabla^2 \psi = F(x - Ut) \qquad (4.5.33)$$

ここで, F は任意の関数であり, $F(x)$ は $t = 0$ における渦度の摂動である.

次に, 速度場の初期摂動を次のような簡単な形式で表すことを考えよう.

$$v = -v_0 \sin kx$$

このとき,

$$\nabla^2\psi = \zeta = -kv_0 \cos kx \quad \text{at} \quad t = 0$$

となり, 時刻 t における渦度場の摂動は

$$\nabla^2\psi = -kv_0 \cos k(x - Ut) \tag{4.5.34}$$

となる. 流線関数を見つけるために, それが渦度と同じ関数の形式を持つと仮定する. すなわち,

$$\psi = A \cos k(x - Ut)$$

このとき,

$$\nabla^2\psi = -Ak^2 \cos k(x - Ut) - AS^2t^2k^2 \cos k(x - Ut)$$

を得る.

上の式の右辺と (4.5.34) の右辺を比較することによって A は決定される. よって,

$$\psi = \frac{v_0 \cos k(x - Ut)}{k(1 + S^2t^2)} \tag{4.5.35}$$

を得る. また, 速度の各成分は

$$u = U - \frac{\partial\psi}{\partial y} = U - \frac{v_0 kSt \sin k(x - Ut)}{k(1 + S^2t^2)}$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{v_0 \sin k(x - Ut)}{1 + S^2t^2}$$

となる. ψ と v は t^2 に反比例し, u は t に反比例すように変化するように思われる. 今摂動は速度 $U = U_0 + Sy$ で移動するので, 波はシアの方向に傾かされ同時に時間と伴に減衰する. エネルギー方程式を見れば, 一度波が風のシア方向に傾き始めると波は減衰することがわかる. このことは, ここで示された結果と一致する. ここで求めた解は, $y = y'$ において唯一渦度をもちそれ以外の場所では渦度がゼロとなるような, ノーマルモード $c(y') = U(y')$ の連続スペクトルを使ってもまた書かれ得る. その解はこれらの関数と初期の渦度の積の積分として書かれる.

不安定な平均風の場に対するノーマルモード解は, しばしば完全系を形成しない. 故に, 妥当であるような全ての初期条件に対する一般的な解を構成するために, ノーマルモード解を使うことはできない. なお, ロスビー波での解 (4.2.8) を使う場合は, 初期条件を満たすような一般的な解を構成することができる. 初期値の手法を使った Case(1960) は, (4.2.5) と (4.2.6) から得られる離散的なノーマルモードに加えて, 上で表現されたものと同様な連続モードもまた一般解には必要とされるということを発見した. これらの連続モードはある点における平均風と等しい位相速度を持ち, なめらかな初期条件が使われるときには, 上で得た結果と同様に連続モードは減衰していく. よって, 連続スペクトルのモードは, 特定の時間周期の後に, 減衰しない特定の離散モードを残して減衰することが予想される.

4.6 実際の大気における順圧不安定

この章における解析は, 絶対渦度の南北勾配が符号を変えるときに, 順圧不安定が発生しうることを示している. ベータ効果の存在は東風ジェットを特定の条件のもとで変動させるが, 中緯度の西風ジェットを安定化させる. 不安定波が存在しないならば, 擾乱は連続的なスペクトルの効果によって減衰されるだろう (Case, 1960). エネルギー方程式は, 擾乱が平均風の水平シアと同じ方向に傾いているとき擾乱は減衰する一方, 逆方向に傾いているときは増幅することを示している. 中緯度の西風ジェットの南側では多くの擾乱は南西-北東方向に傾いているために, 擾乱のエネルギーは平均流によって順圧的に奪われる. このことは, 運動量フラックス $\overline{u'v'}$ の観測によってもまた示されている. よって, 平均的に見れば, 中緯度の擾乱は減衰され, それによる擾乱から平均流への順圧的なエネルギーの流失は, 摩擦に対して平均流を維持する手助けをしているように思われる. しかしながら, ジェットが極端に鋭くなるとき, 順圧不安定は短い期間において発生しなければならない. 一方, 熱帯では順圧不安定はより一般的である. これは, 東風ジェットがより不安定であることや, (平均流を生み出す) 加熱がより小さな水平スケールを持つ傾向があるためである.

4.7 傾圧不安定

傾圧不安定は, 回転する大気中の風の鉛直シアから発生する. このことは, Charney(1947) や Eady(1949) によって初めて調べられた. この不安定性を議論するために, 準地衡風方程式を使うことにしよう. このとき, ポテンシャル渦度方程式 (3.3.66) は次のように書かれるだろう.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{k}\times\nabla\psi^*\cdot\nabla\right)q=0 \tag{4.7.36}$$

ここで, q は

$$q=\nabla^2\psi^*+e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\psi^*}{\partial Z}\right)+\beta y \tag{4.7.37}$$

であり, **ポテンシャル渦度**(potential vorticity) である. また, $\psi^*=f_0^{-1}\Phi$ は地衡風の流線関数, Γ は静的安定度 (3.3.47)[*3]である. 境界条件のために必要とされる熱力学第一法則は, (3.3.55) より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{k}\times\nabla\psi^*\cdot\nabla\right)\frac{\partial\psi^*}{\partial Z}+f_0^{-1}\Gamma\dot{Z}=0 \tag{4.7.38}$$

の形式をとる. 対数圧力座標系 Z は幾何的な鉛直座標と関係が密接であり, 故に気温減率 $-\partial T/\partial z$ が一定であるならば Γ は一定となる. このため, 線形不安定の研究において Z 系は便利である. 一方, 圧力座標系において静的安定度[*4]を定数として取り扱うことは, 非常に非現実的である.

ψ^* を次のように分解して, ポテンシャル渦度方程式を線形化しよう.

$$\psi^*(x,y,Z,t)=\bar{\psi}(y,z)+\psi(x,y,Z,t) \tag{4.7.39}$$

ここで, $|\psi|/|\psi^*|$ は小さいと仮定する. 平均風は, $U=\partial\bar{\psi}/\partial y$ によって与えられる. (4.7.36) において (4.7.39) を用いれば, ポテンシャル渦度方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)q^{'}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=0 \tag{4.7.40}$$

[*3] (3.3.47) を再掲する.
対数圧力座標系 Z において静的安定度は,

$$\Gamma(Z)=\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial Z}+\kappa\bar{\Phi}\right)=R\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial Z}+\kappa\bar{T}\right)=\frac{H^2g}{T}\left(\frac{g}{c_p}+\frac{1}{H}\frac{\partial\bar{T}}{\partial Z}\right)$$

と定義される.

[*4] 圧力座標系における静的安定度 $\sigma(p)$ は,

$$\sigma(p)=\Gamma/p^2$$

と定義される.

となる．ここで,

$$q^{'} = \nabla^2\psi + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right), \tag{4.7.41}$$

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial U}{\partial Z}\right) \tag{4.7.42}$$

である．(4.7.42) は順圧の効果 (右辺第 2 項) と傾圧の効果 (右辺第 3 項) の両方を含んでいる．線形化された熱力学第一法則は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial Z} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial Z} + f_0^{-1}\Gamma\dot{Z} = 0 \tag{4.7.43}$$

となる．ここで, $\dot{Z}$ は鉛直運動の摂動である．この方程式は, 鉛直方向の境界条件のために必要とされる．

今 $\psi = \Psi(y, Z)e^{ik(x-ct)}$ とし, (4.7.40) に代入すれば

$$(U-c)\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right) - k^2\Psi\right] + \frac{\partial\bar{q}}{\partial y}\Psi = 0 \tag{4.7.44}$$

を得る．また, 熱力学第一法則から

$$(U-c)\frac{\partial\Psi}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial Z}\Psi - ik^{-1}f_0^{-1}\Gamma W = 0 \tag{4.7.45}$$

を得る．ここで, $\dot{Z} = W(y, Z)e^{ik(x-ct)}$ とした．Charney and Stern(1962) および Pedlosky(1964a) は, (4.3.16) と同様な不安定のための必要条件を導いた．この必要条件は, 内部領域の $\partial\bar{q}/\partial y$ と上部境界および下部境界における $\partial U/\partial Z$ に依存する．この定理は一般的には 3 つの項を持つので, 不安定性の議論を行なう際に (4.3.16) ほど便利ではないが, 成層圏の問題に対して利用される (Holton, 1975 を参照).

4.8 線形シアに伴う傾圧不安定

Eady 問題

連続的な風のプロファイルを使った最も簡単な傾圧不安定の解は, Eady(1949) によって導かれた．彼は簡単化のために次のような仮定をおいた．

- $\beta = 0$
- ブジネスク近似の適用 ($e^{-Z} \simeq \mathrm{const}$)

- 定数の静的安定度 ($\Gamma = \mathrm{const}$)
- y 方向に一様な解 ($\partial/\partial y = 0$)
- 上部境界は rigid-lid($W = 0 \quad \mathrm{at} \quad Z = 1$)

風のプロファイルは, Z に対して線形な関数

$$U = SZ \tag{4.8.46}$$

で与える. ここで, S は定数である. 南北方向一様の仮定により, ポテンシャル渦度の基本場の南北勾配はゼロである. また, 今 e^{-Z}, Γ が定数であることより, ポテンシャル渦度方程式 (4.7.44) は

$$(U - c)\left(\frac{f_0^2}{\Gamma}\frac{d^2\Psi}{dZ^2} - k^2\Psi\right) = 0 \tag{4.8.47}$$

となる. $U - c \neq 0$ ならば, この方程式の解は次のように得られる.

$$\Psi = A\sinh\left(\frac{Z}{\varepsilon^{1/2}}\right) + B\cosh\left(\frac{Z}{\varepsilon^{1/2}}\right) \tag{4.8.48}$$

ここで, $\varepsilon = f_0^2/k^2\Gamma$ は回転フルード数である ((3.3.48) 参照). $Z = 0, 1$ における境界条件 $W = 0$ は, (4.7.45) から,

$$(U - c)\frac{d\psi}{dZ} - S\Psi = 0 \quad \mathrm{at} \quad Z = 0, 1 \tag{4.8.49}$$

と書かれ得る. (4.8.48) を Z で微分し, (4.8.49) に代入すれば

$$\begin{gathered}
-c\varepsilon^{-1/2}A - SB = 0, \\
(S - c)\varepsilon^{-1/2}[A\cosh(\varepsilon^{-1/2}) + B\sinh(\varepsilon^{-1/2})] \\
-S[A\sinh(\varepsilon^{-1/2}) + B\cosh(\varepsilon^{-1/2})] = 0
\end{gathered} \tag{4.8.50}$$

を得る. 上の式において A, B が非自明な解となるためには, 係数行列の行列式がゼロとならなければならない. このことから, 次のような位相速度に対する方程式が得られる.

$$c^2 - Sc + S^2(\varepsilon^{1/2}\coth\varepsilon^{-1/2} - \varepsilon) = 0 \tag{4.8.51}$$

上の式を c について解き, 整理すれば

$$\begin{aligned}
c &= \frac{S}{2} \pm S\left[1/4 - (\varepsilon^{1/2}\coth\varepsilon^{-1/2} - \varepsilon)\right]^{1/2} \\
&= \frac{S}{2} \pm S\varepsilon^{1/2}\left\{\left[\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2} - \tanh\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2}\right)\right]\left[\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2} - \coth\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2}\right)\right]\right\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.8.52}$$

を得る. したがって,

$$\frac{\varepsilon^{1/2}}{2} < 1.20 \tag{4.8.53}$$

のとき, 根号内は負となる. この場合には c は複素数となり, 解は不安定になる. (3.3.48) の形式 $\varepsilon = L^2/L_R^2$ (ここで $L_R = \Gamma^{1/2}/f_0$ とした) を使えば, 不安定のために必要な条件 (4.8.53) は次のように書かれ得る.

$$\frac{\lambda}{2\pi} = L > \frac{L_R}{2.40} \tag{4.8.54}$$

この条件が満たされるとき, 成長率は

$$kc_i = \pm\frac{S}{L_R}\left\{\left[\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2} - \tanh\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2}\right)\right]\left[\coth\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2}\right) - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{2}\right]\right\} \tag{4.8.55}$$

となる. よって, 成長率は風の鉛直シア S に直接的に比例する. また, L が (4.9) を満たしているとき, $S \neq 0$ であるならば全ての波は不安定となる. 不安定波の成長率が最大となるときの L は,

$$L = \frac{L_R}{1.61} \tag{4.8.56}$$

である. この解析は, 傾圧不安定に関するスケールが $L \sim L_R$ あるいは $\varepsilon \sim 1$ であることを示唆している. 総観スケールの擾乱に対しては $\varepsilon \sim 1$ であることが観測されているので, それらの擾乱の主要なエネルギー源が傾圧不安定であると考えてもよいであろう.

不安定波の位相速度は,

$$c_r = \frac{S}{2} \tag{4.8.57}$$

であり, これは今のモデルの鉛直方向の対称性からもっともらしい. 不安定な固有解は $Z = 1/2$ 付近を中心にして鉛直方向に対称性があり, 振幅は $Z = 1/2$ 付近で極大となる[*5]. この鉛直構造は, 観測される総観スケールの擾乱と定性的に同様なものである.

[*5]固有関数の鉛直方向の対称性は, Eady 問題における傾圧不安定波の鉛直構造の特徴の一つである. このことについて, 少しだけ言及する.

(4.8.50) の一式目を使って, (4.8.48) の任意定数 B を消去すれば, 振幅を表す複素関数 $\Psi(Z)$ は

$$\Psi = A\left[\left\{\sinh\left(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \frac{c_r}{S\sqrt{\varepsilon}}\cosh\left(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\} - i\frac{c_i}{S\sqrt{\varepsilon}}\cosh\left(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]$$

となる. ここで, Ψ を振幅 $|\Psi|$ と位相角 $k\theta$ を使って表そう (すなわち, $\Psi(Z) = |\Psi(Z)|e^{k\theta}$ と表す).

$$|\Psi(Z)|^2 = A^2\left\{\sinh\left(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \frac{c_r}{S\sqrt{\varepsilon}}\cosh\left(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\}^2 + A^2\frac{c_i^2}{S^2\varepsilon}\cosh^2\left(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$\tan k\theta = \frac{c_i}{S\sqrt{\varepsilon}}\cosh\left(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left[\sinh\left(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \frac{c_r}{S\sqrt{\varepsilon}}\cosh\left(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]^{-1}$$

である. 任意定数 A は初期条件によって決定される.

この形式の不安定が, 上部および下部境界における境界条件 (4.8.49) と深く結びついていることに注目することが重要である. これらの境界における境界条件が $\Psi = 0$ に置き換えられたならば, 不安定波は存在しない.

ここで示した Eady 問題は, 前述の順圧不安定の議論でも述べたように離散ノーマルノードが完全系を形成しない状況の一例である. 今回の場合には, めいめいの k に対してちょうど 1 組の解が存在した. Pedlosky(1964b) はこの問題を初期値の手法を使って取り扱い, 滑らかな初期擾乱が減衰するような連続スペクトルの解を発見した.

Charney 問題

Charney(1947) による傾圧不安定のモデルでは Eady と同じ風のプロファイルを用いたが, Eady が無視したいくつかの効果を残している. Charney のモデルはベータ効果を考慮し, ブジネスク近似を行わない. また, 上部境界を無限遠に置いている. この場合に, ポテンシャル渦度の基本場の南北勾配 (4.7.42) は,

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta + f_0^2 S/\Gamma \tag{4.8.59}$$

ここで, 静的安定度 Γ は定数としている. 西風の平均流 ($S > 0$) に対して, ポテンシャル渦度の基本場の南北勾配は正の定数となる. 一方で, Eady のモデルではこの勾配はゼロであった. このとき, 固有値問題 (4.7.44) は次のようになる.

$$(SZ - c)\left[\frac{f_0^2}{\Gamma}\left(\frac{d^2\Psi}{dZ^2} - \frac{d\Psi}{dZ}\right) - k^2\Psi\right] + (\beta + \frac{f_0^2 S}{\Gamma})\Psi = 0 \tag{4.8.60}$$

$\partial\bar{q}/\partial y$ がゼロでないために, (4.8.47) に比べてこの方程式を解くことはずっと難しい. この方程式は, 合流型超幾何常微分方程式に変換することができる. この変換された方程式において重要となるパラメータは,

$$r = \frac{\Gamma(\beta + S f_0^2/\Gamma)}{f_0^2 S(1 + 4\Gamma f_0^{-2} k^2)^{1/2}} \tag{4.8.61}$$

である. 合流型超幾何関数を変換された境界条件に代入して, c について解くことはとても難しい. この問題は Gambo(1950), Kuo(1952), Green(1960), Burger(1962) によって扱われ, Kuo(1973) はこの問題に対するレビューを与えた. 図 4.8.7 は,

よって, 不安定波に対する最終的な ψ の解の形式は, 上の表記を使って

$$\psi(x, Z, t) = |\Psi(Z)|\, e^{kc_i t} \quad \exp\left[ik(x - c_r t + \theta(Z))\right] \tag{4.8.58}$$

と書かれる. (4.8.53) を満たすとき, この解の振幅 $|\Psi|$ や位相 θ の鉛直構造について調べてみると, その構造は $Z = 1/2$ 付近を中心にして対称性があり, 振幅は $Z = 1/2$ 付近で極大となることが確認される.

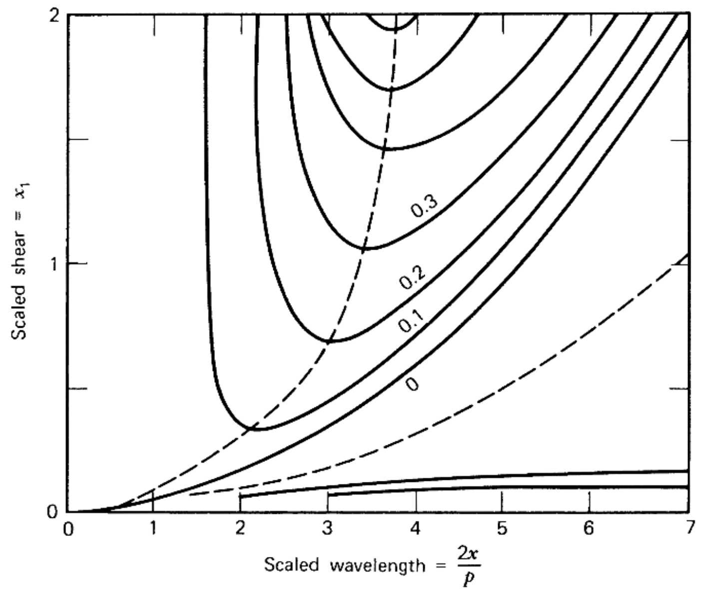

図 4.8.7: Green(1960) によって計算された Charney モデルに対する安定度のグラフ．ただし, $Z = 1$ において剛体境界としている．(Green, J.S.A, 1960 : A Problem in Baroclinic Stability. *Royal Meteorological Socitey*)

Green(1960) の数値積分によって得られた安定性ダイアグラムであり, $Z = 1$ は剛体境界としている．この図の横軸は波長 $1/k$, 縦軸は風の鉛直シア S である．また, 図中の曲線は擾乱の成長率 kc_i の等値線を表している．上側の中性曲線 (成長率がゼロである等値線) は, $r = 1$ に対するもので Charney, Gambo, Kuo によって発見された．破線は成長率が極大となる部分を示している．Burger は, 中性曲線となるような r が整数の場合を除けば, 全ての r の値に対して不安定は発生することを示した．横軸近傍の 2 本の曲線は, $r = 2,\ 3$ に対応する．

中性曲線が安定領域または中性領域から不安定領域を分割しないので, この結果は安定性問題としては非常に珍しい．しかしながら, 0.1 以下の等値線より外側の成長率はとても小さく, そのような波は摩擦が存在する場合には存在できない．大きな S の値に対して, 安定性ダイアグラムの最も不安定な部分が Eady の結果と似ている．

4.9 2層モデル

Charney モデルの安定性の特徴を解析的に調べることは難しいため, 非常に簡単化された鉛直構造を持つモデルを使うと便利である.「2 層モデル」では図 4.9.8 のように大気を 4 層に分割し, レベル 1,3 において風, レベル 2 において鉛直運動を指定する. 2 層モデルを用いることで数学的な取扱いがとても簡単になり, かつその結果は Charney モデルと一致する. この解析は, 対流圏への適用を簡単にするために圧力座標系において行われる. 圧力座標系における渦度方程式 (3.3.76) と熱力学第一法則 (3.3.77) を次のように書こう.

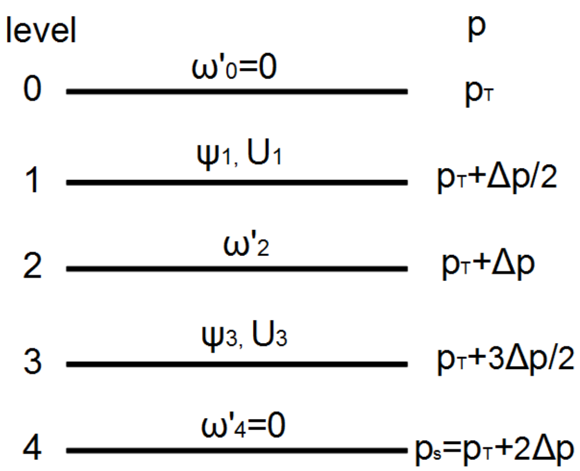

図 4.9.8: 2 層モデルの鉛直構造

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{k}\times\nabla\psi^{*}\cdot\nabla\right)(\nabla^{2}\psi^{*}+\beta y)-f_{0}\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{4.9.62}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{k}\times\nabla\psi^{*}\cdot\nabla\right)\frac{\partial\psi^{*}}{\partial p}+\frac{\sigma}{f_{0}}\omega=0 \tag{4.9.63}$$

2 層モデルの定式化において, (4.9.62) と (4.9.63) を鉛直方向に離散化してから, ポテンシャル渦度方程式の有限差分形式を直接的に導くために 2 式を結合するとより都合がよい. 前者の段階で, 上部境界と下部境界の境界条件が自動的に含まれる.

最初に (4.9.62) と (4.9.63) を線形化するために, 従属変数を次のように分割する.

$$\begin{aligned}\psi^{*}&=-U(p)y+\psi(x,p,t)\\ \omega&=\omega^{'}(x,p,t)\end{aligned} \tag{4.9.64}$$

よって, 風の場は東西平均流 $U(p)$ と y に依存しない擾乱場の和で表される. (4.9.64) を (4.9.62) と (4.9.63) に代入すれば,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x^{2}}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}-f_{0}\frac{\partial\omega^{'}}{\partial p}=0 \tag{4.9.65}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p}-\frac{dU}{dp}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\sigma}{f_{0}}\omega^{'}=0 \tag{4.9.66}$$

を得る. これらの線形化された方程式は (4.9.64) のように変数を分離して得られたため, ψ と $\omega^{'}$ が小さくない時でもこの線形化された方程式は適用され得る.

地表 $p=p_s$ と対流圏界面 $p=p_T$ において課される境界条件は $\omega^{'}=0$ である. $p=p_T$ において課されるこの境界条件は, 成層圏の強い静的安定性は鉛直運動を小さくする傾向があるため, 合理的な近似である.

ここで, (4.9.65) をレベル 1, 3 において適用し, また鉛直微分の項を中心差分を使って有限差分近似すれば

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_{1}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{2}\psi_{1}}{\partial x^{2}}+\beta\frac{\partial\psi_{1}}{\partial x}-f_{0}\frac{\omega^{'}}{\Delta p}=0 \tag{4.9.67}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_{3}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{2}\psi_{3}}{\partial x^{2}}+\beta\frac{\partial\psi_{3}}{\partial x}+f_{0}\frac{\omega^{'}}{\Delta p}=0 \tag{4.9.68}$$

$$\tag{4.9.69}$$

となる. また, 熱力学第一法則 (4.9.66) はレベル 2 において適用される. ここでも鉛直微分を中心差分で評価し, レベル 2 の ψ と U をレベル 1,3 の ψ と U の平均で表せば,

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{U_{1}+U_{3}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right](\psi_{1}-\psi_{3})\\ &\qquad-\left(\frac{U_{1}-U_{3}}{2}\right)\left(\frac{\partial\psi_{1}}{\partial x}+\frac{\partial\psi_{3}}{\partial x}\right)-\left(\frac{\Delta p\sigma_{2}}{f_{0}}\right)\omega_{2}^{'}=0\end{aligned} \tag{4.9.70}$$

となる．(4.9.67), (4.9.68), (4.9.70) は, 3 つの未知変数 ψ_1, ψ_3, $\omega_2^{'}$ を含む閉じた方程式系である．

これらの方程式を解く前に, 得た解の解釈に用いられるエネルギー方程式を導くことにしよう．(4.9.67) に $-\psi_1$, (4.9.68) に $-\psi_3$ を掛けてから 2 式を加え, x について平均を取れば,

$$\frac{d}{dt}\overline{\left[\frac{(\partial\psi_1/\partial x)^2+(\partial\psi_3/\partial x)^2}{2}\right]}=-\frac{f_0}{\Delta p}\overline{\omega_2^{'}(\psi_1-\psi_3)} \tag{4.9.71}$$

を得る．左辺の項は擾乱の運動エネルギーの時間変化率を表してる．ポテンシャルエネルギーに対する方程式は, (4.9.70) に $\lambda(\psi_1-\psi_3)$ を掛けて, x について平均を取ることによって得られる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\overline{\left[\frac{\lambda(\psi_1-\psi_3)^2}{4}\right]}=&-\frac{\lambda}{4}(U_1-U_3)\,\overline{(\psi_1-\psi_3)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right)}\\&+\frac{f_0}{\Delta p}\overline{\omega_2^{'}(\psi_1-\psi_3)}\end{aligned} \tag{4.9.72}$$

ここで,

$$\lambda=2f_0^2/(\Delta p^2\sigma_2) \tag{4.9.73}$$

である．$\psi_1-\psi_3$ は, 鉛直方向に平均化された温度摂動に比例することに注意されたい[*6]．(4.9.72) の左辺は, 擾乱の有効位置エネルギーの時間変化率を表す．第 1.11

[*6] 圧力座標系における静水圧平衡の式は,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\frac{RT}{p}$$

である．ここで, Φ はジオポテンシャルである．

$\Phi=\bar{\Phi}(p)+\Phi^{'}(x,p,t)$ をとして基本場と摂動場に分割すれば, 摂動場に対する静水圧平衡の式は

$$\frac{\partial\Phi^{'}}{\partial p}=-\frac{RT^{'}}{p}$$

となる．今, $\Phi^{'}=f_0\psi$ の関係にあることに注意されたい．この式をレベル 1 からレベル 3 まで積分すれば,

$$T_2^{'}=f_0\frac{\psi_1-\psi_3}{R\ln(p_3/p_1)}$$

を得る．ここで, レベル 2 における温度摂動 $T_2^{'}$ をレベル 1 とレベル 3 の間の平均として次のように定義した．

$$T_2^{'}=\frac{\int_{p_1}^{p_3}(T/p)\,dp}{\int_{p_1}^{p_3}d\mathrm{ln}p} \tag{4.9.74}$$

したがって, $\psi_1-\psi_3$ は, レベル 1 とレベル 3 の間で鉛直方向に平均化された温度摂動 $T_2^{'}$ に比例する．

節で示したように, 有効位置エネルギーは等圧面上の温度の分散を静的安定度の平均で割ったものよって近似され得る. (4.9.71) の右辺の項は, (4.9.72) の右辺第 2 項と符号が反対であるだけなので, 擾乱の有効位置エネルギーが擾乱の運動エネルギーに変換される過程を表現している. この項は, レベル 2 にある相対的に暖かい空気 ($\psi_1 - \psi_3 > 0$) が上昇 ($\omega_2' < 0$) し, 冷たい空気 ($\psi_1 - \psi_3 < 0$) が下降 ($\omega_2' > 0$) するとき正となる. このような空気塊の運動の過程は大気の重心を下方にずらすために, 位置エネルギーを運動エネルギーに変換する. 地衡風の鉛直シア $U_1 - U_3$ の存在は, 帯状平均的な南北温度勾配が存在することを示唆する. (4.9.72) の右辺第 1 項は, 平均場に伴う有効位置エネルギー ($U_1 - U_3$ と関連付けられる) が擾乱の有効位置エネルギーに変換される過程を表現している. この項は, レベル 2 にある北側に移動する $((\partial\psi_1/\partial x + \partial\psi_3/\partial x)/2 > 0)$ 空気が相対的に暖かく ($\psi_1 - \psi_3 > 0$), 南側に移動する $((\partial\psi_1/\partial x + \partial\psi_3/\partial x)/2 < 0)$ 空気が相対的に冷たい ($\psi_1 - \psi_3 < 0$) ときに, 正となる. 南北境界が存在する場合には, この過程によって地衡風の鉛直シア $U_1 - U_3$ を弱められるだろう.

今, 次のような波動解を方程式系の解として用いることにしよう.

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \Psi_1 e^{ik(x-ct)} \\
\psi_3 &= \Psi_3 e^{ik(x-ct)} \\
\omega_2' &= (\Delta p f_0^{-1}) W e^{ik(x-ct)}
\end{aligned}
\tag{4.9.75}
$$

上の解の形式を (4.9.67), (4.9.68), (4.9.70) に代入すれば,

$$k[\beta - k^2(U_1 - c)]\Psi_1 + iW = 0 \tag{4.9.76a}$$

$$k[\beta - k^2(U_3 - c)]\Psi_3 - iW = 0 \tag{4.9.76b}$$

$$k[U_3 - c]\Psi_1 - k[U_1 - c]\Psi_3 + i2W/\lambda = 0 \tag{4.9.76c}$$

を得る. 振幅 Ψ_1, Ψ_3, W が非自明な解となるためには, 上の振幅に対する連立方程式の係数行列の行列式がゼロでなければならない. この条件から次のような c に対する 2 次方程式を得る.

$$
\begin{aligned}
&2k^2(k^2+\lambda)c^2 + [2\beta(2k^2+\lambda) - 2k^2(k^2+\lambda)(U_1+U_3)]c \\
&\quad + 2\beta^2 - \beta(2k^2+\lambda)(U_1+U_3) + 2k^4U_1U_3 + k^2\lambda(U_1^2+U_3^2) = 0
\end{aligned}
$$

この 2 次方程式を c について解けば,

$$
\begin{aligned}
c = (U_1+U_3)/2 - &\frac{\beta(2k^2+\lambda)}{2k^2(k^2+\lambda)} \\
&\pm \frac{[\lambda^2\beta^2 - k^4(\lambda^2 - k^4)(U_1-U_3)^2]^{1/2}}{2k^2(k^2+\lambda)}
\end{aligned}
\tag{4.9.77}
$$

を得る. (4.9.77) の根号内が負となる場合には c は複素数となり, 解は不安定となる. 実際に不安定な解は, k^4 が λ^2 よりも小さくかつ $(U_1 - U_3)^2$ が十分に大きいとき

に発生する．根号内が正で c が実数となる場合には, 中立解が発生する．波長 (k^{-1}) と鉛直シア $(U_1 - U_3)$ を軸に取る安定性ダイアグラムにおいて, 不安定領域は根号内がゼロとなる場合に定義される曲線によって分割される．この中性曲線は次のように書かれる．

$$(U_1 - U_3)^2 = \frac{\lambda^2 \beta^2}{k^4(\lambda^2 - k^4)} \tag{4.9.78}$$

λ と β を固定するとき, この中性曲線は, 図 4.9.9 において成長率がゼロである $n = 0$ の曲線に対応する．不安定領域は, 短波長側において次の漸近線によって隔てられる．

$$k^{-1} = \lambda^{-1/2} = \Delta p \sigma_2^{1/2}/(f_0/\sqrt{2}) \tag{4.9.79}$$

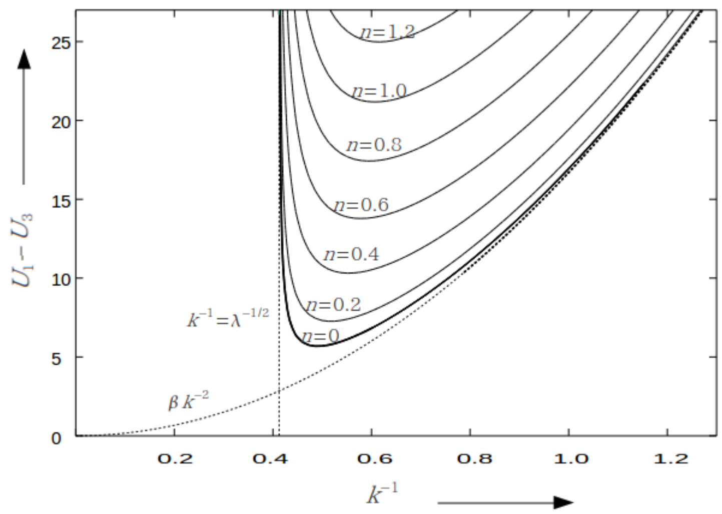

図 4.9.9: $\lambda = 5.88 \times 10^{-12}$ m^{-2}, $\beta = 1.67 \times 10^{-11}$ m^{-2}s^{-1} に固定したときの 2 層モデルにおける成長率 $n = k|c_i|$ のグラフ．n は $U_1 - U_3$ と k^{-1} の関数となっている．なお, k^{-1}, $U_1 - U_3$, n の単位はそれぞれ 10^6 m, ms^{-1}, 10^{-5} s^{-1} である．

一方, $k^2 \ll \lambda$ となる長波に対して, 中性曲線 (4.9.78) は次のように近似される.

$$|U_1 - U_3| = \beta/k^2 \tag{4.9.80}$$

また, それらの間の波長領域において (4.9.78) は極小を持つ. (4.9.78) の k^{-1} による微分をゼロとおくことにより, $k^{-1} = 2^{1/4}\lambda^{-1/2}$ において, $U_1 - U_3$ は極小値

$$(U_1 - U_3)_{\min} = 2\beta/\lambda = \beta\frac{\Delta p^2 \sigma_2}{f_0^2} \tag{4.9.81}$$

をとることが分かる. ここで紹介した準地衡風 2 層モデル (two level model) の安定性の特徴は, パラメータが適切に等しくとられたならば, 非圧縮で均質な 2 層を使った準地衡風 2 層モデル (two layer model)(Phillips, 1951) に対するものと同じになる.

(4.9.79) で表される短波のカットオフは, 静的安定度と関係している. 一方, 長波の安定性は, (4.9.80) がロスビー波の分散関係式のベータの項と同じであるので, ベータ効果と関係している. 不安定が生じる鉛直シアの最小値は, β と静的安定度の積に比例する. 興味深い点は, 地球の自転をゼロとするとき, この不安定は存在しない点である. また, $\beta = 0$ の特別な場合における不安定の条件は

$$k^{-1} > \Delta\sigma_2^{1/2}/(f_0\sqrt{2}) \qquad U_1 \neq U_3 \tag{4.9.82}$$

と書くことができる. このことは, Eady 問題の解おいて対応する不安定の条件

$$k^{-1} > \Gamma/(f_0 2.4) \qquad S = dU/dZ \neq 0 \tag{4.9.83}$$

と比較され得る. これらの条件は, 明らかに同じ一般的な形式を持っている. $\beta \neq 0$ である一般的な場合に対して, 2 層モデルに対する安定性ダイアグラム (図 4.9.9) は, Charney の連続モデルに対する安定性ダイアグラム (図 4.8.7) と外面的に大きく異なる特徴を持つ. 後者の安定性ダイアグラムは, 解が中立となる特定の曲線を除いて, ダイアグラムの全体で不安定である. しかしながら, 連続モデルに対するダイアグラムのほとんどの領域において成長率は小さい. もし摩擦が存在するならば, これらの波の多くは減衰するであろう. 成長率に対して特定の閾値を指定するとき, 実質的な不安定領域は図 4.8.7 中の成長率の等値線の一本によって取り囲まれるだろう. その形状は, 図 4.9.9 中の 2 層モデルに対する安定境界 (4.9.78) と同様なものとなる. この意味で, 2 層モデルは総観スケールの傾圧不安定波の大まかな振る舞いを与える. 総観規模において, 観測される最も不安定な波の波長スケールは約 4000 または 5000 km である.

4.10 2層モデルにおける波の構造

この節では2層モデルにおける波の構造を決定しよう．このとき, エネルギー方程式 (4.9.71) と (4.9.72) の項を評価することが可能となる．(4.9.77) は2つの解を持っているので, それらの解の符号に対応させてそれぞれ c^+, c^- と表すことにする．第2.6節において, 浅水方程式に対する一般解は, 三つの位相速度 (固有値) とその固有値に対応する固有ベクトルを使って書かれた．2層モデルに対する一般解は,

$$\psi_1 = \mathrm{Re}\left[a^+\Psi_1^+ e^{ik(x-c^+t)} + a^-\Psi_1^- e^{ik(x-c^-t)}\right] \tag{4.10.84a}$$

$$\psi_3 = \mathrm{Re}\left[a^+\Psi_3^+ e^{ik(x-c^+t)} + a^-\Psi_3^- e^{ik(x-c^-t)}\right] \tag{4.10.84b}$$

$$\omega_2' = \Delta p f_0^{-1}\mathrm{Re}\left[a^+W^+ e^{ik(x-c^+t)} + a^-W^- e^{ik(x-c^-t)}\right] \tag{4.10.84c}$$

と書かれる．ここで, Re は複素数の実部を表す．任意の複素数は $\psi = |\Psi|e^{i\theta}$ と書くことができるので, (4.10.84) を評価する際にはオイラーの関係式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{4.10.85}$$

を用いると便利である．ω_2' は, オメガ方程式によって ψ_1 と ψ_3 と診断的に関係付けられるので, (4.10.84c) は必要とされない．c^+ または c^- に対する振幅の関係式は, (4.9.76) から求めることができる．特に (4.9.76a) と (4.9.76b) を加えれば,

$$\Psi_1^\pm = -\frac{c^\pm - (U_3 - \beta/k^2)}{c^\pm - (U_1 - \beta/k^2)}\Psi_3^\pm \tag{4.10.86}$$

が導かれる．また鉛直運動の振幅は, (4.9.76b) から次の形式において求まる．

$$W^\pm = -ik^3[c^\pm - (U_3 - \beta/k^2)]\Psi_3^\pm \tag{4.10.87}$$

もし ψ_1 と ψ_3 の振幅と位相が初期に与えるならば, a^+ と a^- は (4.10.84a) と (4.10.84b) において与えられた初期条件を用いることによって得られる．

中立解に対する波の構造

図 4.9.9 の不安定領域の外側に存在し得る中立な波に対しては, $c^\pm$ は実数であり, $c^+ > c^-$ を満たす．このとき, (4.10.86) において右辺の係数が実数となるので, $\Psi_1^\pm$ と $\Psi_3^\pm$ が同位相であるか180度位相がずれていることが示される．鉛直運動は, (4.10.87) から分かるように, 流線関数の場に対して位相が90度ずれている．これ

らの位相の関係のために, (4.9.71) と (4.9.72) の右辺におけるエネルギー変換の項は, これらの中立波の一方に対してゼロとなる[*7]. (4.10.84) のように 2 つの中立波が重ね合わせられるときには, エネルギー変換はゼロの周りを周期的に変動する.

波長の短い中立波に対しては, (4.9.77) の β/k^2 のオーダの項を落とすことができる. この条件に対して, (4.9.77) は

$$c^{\pm} = \frac{U_1+U_3}{2} \pm \frac{1}{2}\left[\frac{k^2-\lambda}{k^2+\lambda}(U_1-U_3)^2\right]^{1/2} \tag{4.10.88}$$

となる. この場合において, (4.10.86) から

$$\Psi_1^+/\Psi_3^+ > 1, \qquad \Psi_1^-/\Psi_3^- < 1 \tag{4.10.89}$$

関係が導かれる. したがって, より大きい振幅は, 位相速度が平均風速と最も近い高度において発生する. $W = |W|\, e^{-i\theta}$(θ は初期位相を表す) と書き, $\Psi_3 > 0$ と選ぶことによって, (4.10.87) と (4.10.88) から $\theta = \pi/2$ であることが分かる. このことは, トラフの前方で上昇運動 ($\omega < 0$) が存在し, その後面で下降運動 ($\omega > 0$) が存在することを意味する. この波の構造は, 第 4.8 節の Eady モデルの中立波に対して見つかる. ここで得られた一般的な鉛直構造は, 等価順圧モデルから得られる鉛直構造と同様なものである.

鉛直シア $U_1 - U_3$ が存在しないとき, (4.9.77) は

$$\begin{aligned} c^+ &= (U_1+U_3)/2 - \beta/(k^2+\lambda) \\ c^- &= (U_1+U_3)/2 - \beta/k^2 \end{aligned} \tag{4.10.90}$$

となる. c^- の解は, (4.10.86) と (4.10.87) から $W^- = 0$ と $\Psi_1^- = \Psi_3^-$ を得るので, 純粋なロスビー波である ((4.2.10) を参照). 一方, c^+ の解は, (4.10.86) と (4.10.87) から $W^- \neq 0$ と $\Psi_1^+ = -\Psi_3^+$ を得るので, 内部ロスビー波である. この振る舞いは, $(U_1-U_3)^2$ が十分に小さいとき, 長波に対して予期され得る.

不安定解に対する波の構造

図 4.9.9 の不安定領域において, 位相速度は次のように書くことにする.

$$c^{\pm} = c_r \pm in/k$$

[*7] Ψ_1^+ と Ψ_3^+(あるいは Ψ_1^- と Ψ_3^-) は同位相もしくは 180 度位相がずれているが, Ψ_1^+ と Ψ_3^-(あるいは Ψ_1^- と Ψ_3^+) に対してもそのような位相の関係があるかは分からない. したがって, Ψ_1^+, Ψ_3^+ と W^-(あるいは Ψ_1^-, Ψ_3^- と W^+) の位相が 90 度ずれているとは限らない. (4.10.84) のように 2 つの中立波が重ね合わせられるときには, このことに注意する必要がある.

ここで,

$$
\begin{aligned}
c_r &= (U_1+U_3)/2 - \beta(2k^2+\lambda)/[2k^2(k^2+\lambda)] \\
n &= [k^4(\lambda^2-k^2)(U_1-U_3)^2 - \lambda^2\beta^2]^{1/2}/[2k(k^2+\lambda)]
\end{aligned} \tag{4.10.91}
$$

であり, n は成長率を表す. このとき解は,

$$
\psi_{1,3} = \mathrm{Re}\left[a^+\Psi^+_{1,3}e^{ik(x-c_rt)}e^{nt} + a^-\Psi^-_{1,3}e^{ik(x-c_rt)}e^{-nt}\right] \tag{4.10.92}
$$

と書かれる. $a^+=0$ の特別な場合を除いて, 指数関数的に成長する解は, 急速に減衰する解を卓越するだろう. この理由のために, 成長解の構造を詳細に調べることが望まれる.

c が複素数であるとき, (4.10.86) と (4.10.87) の右辺の係数は複素数となるため, 不安定波の位相の構造は前述した中立波の構造とは異なるだろう. (4.10.91) を使えば, (4.10.86) と (4.10.87) は次のように書き直される.

$$
\Psi_1^{\pm} = -\frac{\{c_r-[(U_1+U_3)/2-\beta/k^2]\}^2-(U_1-U_3)^2/4+n^2/k^2 \mp in(U_1-U_3)/k}{[c_r-(U_1-\beta/k^2)]^2+n^2/k^2}\Psi_3^{\pm} \tag{4.10.93}
$$

$$
W^{\pm} = k^3\{\pm n/k - i[c_r(U_3-\beta/k^2)]\}\Psi_3^{\pm} \tag{4.10.94}
$$

(4.10.93) の右辺の係数の虚部の符号を見れば分かるように, 波の位相構造が成長解と減衰解の間で逆転することに注意されたい. レベル 2 の温度摂動は, 静水圧平衡の式の積分から次のように計算される[*6].

$$
T_2' = f_0(\psi_1-\psi_3)/[R\ln(p_3/p_1)] \tag{4.10.95}
$$

ここで例として, 増幅する解の構造を次の典型的な値を使って計算してみよう.

$$
\begin{gathered}
f_0 = 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}, \quad \beta = 1.67\times10^{-11}\ \mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1}, \quad 2\pi/k = 4000\ \mathrm{km}, \\
\lambda = 5.88\times10^{-12}\ \mathrm{m}^{-2}, \quad p_s = 1000\mathrm{hPa}, \quad \Delta p = 400\mathrm{hPa}, \\
U_1-U_3 = 20\ \mathrm{ms}^{-1}, \quad a^- = 0, \quad a^+\Psi_3^+ = 10\ \mathrm{ms}^{-1}/k
\end{gathered}
$$

なお, 最後の関係式によってレベル 3 の成長解の振幅と位相が指定される. (4.10.93) とオイラーの関係式を用いれば, (4.10.92) から ψ_1 と ψ_3 に対する解を次のように得る.

$$
\begin{gathered}
\psi_1 = (14.2\ \mathrm{ms}^{-1})k^{-1}\cos[k(x-c_rt)+64^\circ]\,e^{nt} \\
\psi_3 = (10\ \mathrm{ms}^{-1})k^{-1}\cos[k(x-c_rt)]\,e^{nt}
\end{gathered} \tag{4.10.96}
$$

一方, 鉛直運動は, (4.10.84c), (4.10.94) から次の形式で得られる.

$$
\omega_2' = -1.36\times10^{-3}\ \mathrm{hPa\,s^{-1}}\cos[k(x-c_rt)+116^\circ]\,e^{nt} \tag{4.10.97}
$$

温度摂動については, 上で得られた ψ_1, ψ_3 の解を (4.10.95) に代入することによって,

$$T_2' = (4.24\ \mathrm{K})\ \cos[k(x - c_r t) + 108^\circ]\ e^{nt} \tag{4.10.98}$$

と得られる. 流線関数の振幅は, 速度の y 方向成分を波数 k で割ることによって与えられることに注意されたい.

(4.10.96), (4.10.97), (4.10.98) によって与えられる場を, 図 4.10.10 の断面図に示

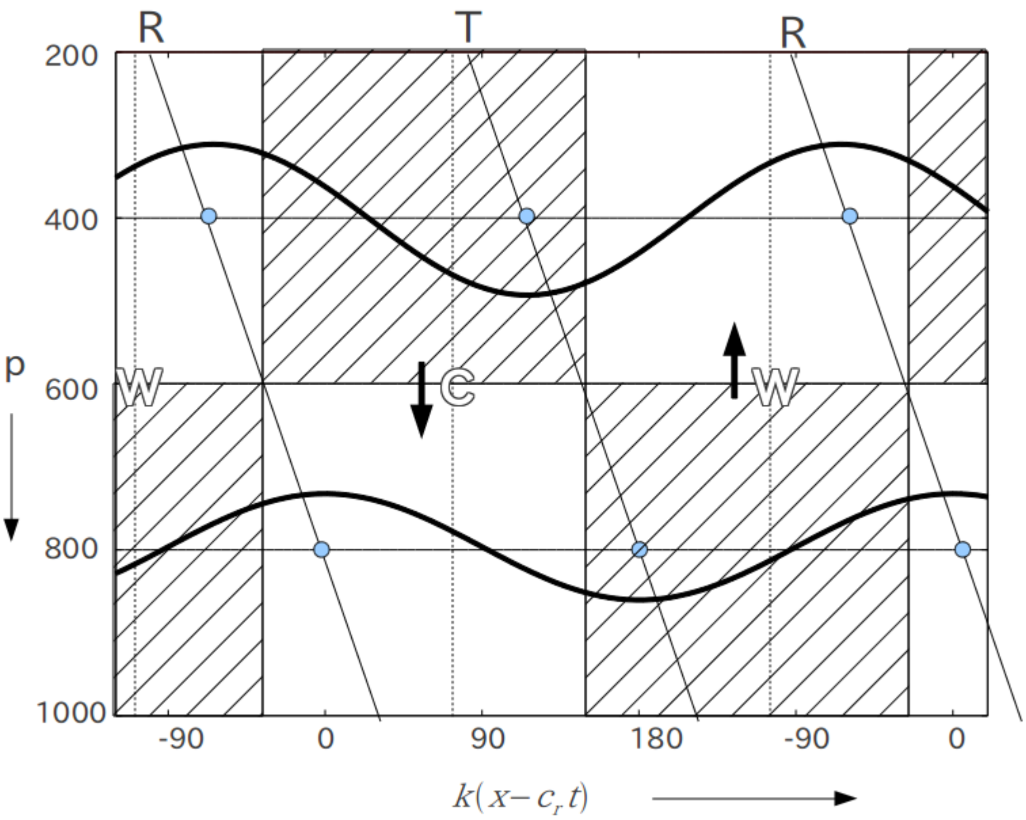

図 4.10.10: (4.10.96), (4.10.97), (4.10.98) によって与えられる不安定波の断面図.

す．上側と下側の曲線はそれぞれ ψ_1 の ψ_3 を表し, T はトラフ, R はリッジを表している．この断面図から擾乱は西に傾いていることが見て取れる．また, (4.10.96) から擾乱の振幅はレベル 1 においてより大きくことが分かるが, このことはベータ効果に起因している[*8]．温度摂動の極大と極小は, 図中において W と C で示している．さらに, 図中のハッチングを施した領域は水平発散が負の領域を示し, ハッチングを施していない領域は水平発散が正の領域を示している．これらの場は, 質量の連続性によって必要とされる．

観測される総観スケールの擾乱は, 2 層モデルにおける不安定波と共通した特徴を多く持つ．観測される総観スケールの擾乱は高さとともに西方に傾き, 上層のトラフの前面で上昇運動が存在する．また, 観測される系は, 地表の低気圧の位置の東側で降水量の極大を持つ傾向がある．図 4.10.10 において, 鉛直運動が極大となるのは地表におけるトラフの位置のちゅうど東側であり, このことは観測される降水量の傾向と一貫性がある．

(4.9.71) と (4.9.72) におけるエネルギー変換は, 図 4.10.10 または (4.10.96), (4.10.97), (4.10.98) から簡単に評価される．図より, 暖かい空気が上昇し, 冷たい空気が沈み込むので, 擾乱の有効位置エネルギーは擾乱の運動エネルギーに変換されていくことは明らかである．暖かい空気は主にトラフとリッジの間に存在するので北側へ移動し, 逆に冷たい空気は南側へ移動する．このプロセスは, 帯状平均の有効位置エネルギーを擾乱の有効位置エネルギーに変換する．運動エネルギーと温度場の分散の両方が増大する不安定波において, これらの正のエネルギー変換が必要とされる．

Oort(1964) は, 大気のエネルギーダイアグラムを作成するためのデータを集めた．その結果の図を図 4.10.11 に示す．このエネルギーダイアグラムにおいて, $\bar{K}$ は帯状平均風の運動エネルギー, $\bar{P}$ は帯状平均された温度場の有効位置エネルギーである．一方, K' は帯状平均に対する風の摂動 (風の擾乱場) の運動エネルギー, P' は帯状平均に対する温度の摂動の有効位置エネルギーである．北半球における年平均のデータが, エネルギーダイアグラムの作成に用いられた．エネルギー変換 $\{\bar{P}\cdot P'\}$, $\{P'\cdot K'\}$ の簡単化された形式は, (4.9.72), (4.9.71) の右辺第一項によってそれぞれ与えられる．一方, $\{K'\cdot\bar{K}\}$ については (4.3.21) の右辺と同様の形式で与えられる．エネルギー変換 $\{\bar{P}\cdot\bar{K}$ は $-\bar{\omega}\bar{T}$ を含み, 平均子午面循環によって決定される．図 4.10.11 は, 帯状平均された非断熱加熱 $\bar{Q}$ のエネルギーが $\bar{P}$ へと流れた後, 主に P' それから K' へと変換されることを示している．そのようなエネルギー変換が傾圧不安定波によって引き起こされるということは, 先程示した．また, スペクトルの研究によれば, その変換には惑星スケールの波動も寄与するが, 主に総観スケールの波によって引き起こされることが示されている．K' から $\bar{K}$ への順圧

[*8] $\beta=0$ のとき, (4.10.93) の右辺の係数の大きさは 1 となる．

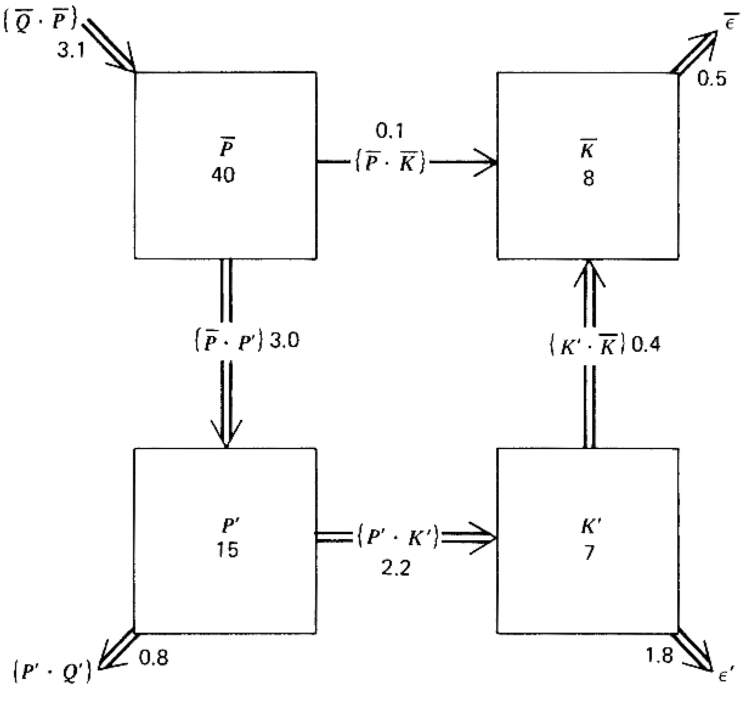

図 4.10.11: Oort(1964) のデータによる大気のエネルギーサイクル．ボックスの内の数字は, 観測される北半球の各エネルギー値の年平均を示している．単位は 10^5 J m^{-2} である．また, エネルギー変換を表す矢印の下の数字の単位は Wm^{-2} である．(Oort, A.H., 1964: On Estimates of the Atmospheric Energy Cycle., *American Meteorological Society* より引用)

的な変換は, 第 4.6 節の順圧不安定の議論のように予期される. 図は $\bar{P} \cdot \bar{K}$ がとても小さいことを示している. これらの結果は, 傾圧的な総観スケールの波動が大循環のバランスを維持するということを強く示唆する. これらの波によって生成される運動エネルギーは, 摩擦によって大気から失われる運動エネルギーとバランスするのに役立つ. 傾圧波動による北側への熱輸送は, 加熱超過となっている低緯度から冷却超過となっている高緯度へと熱を郵送することによって, 熱的なバランスを維持する. また, 総観スケールの擾乱は, 順圧的な減衰を通して帯状平均流の運動エネルギーも維持する.

リッジとトラフが, それぞれ水平発散領域と水平収束領域に対応していることに注意されたい. (4.9.62) によれば, 渦度の極大となるところ (トラフ線の上であり, ここでは移流はゼロとなる) で水平収束 ($\partial\omega/\partial p > 0$) が存在するならば, その渦度の極大は増加のみし得ることが分かる. 同様の議論は, 渦度の極小についても適用される. 渦度の極大と極小の値の差が増大しない限り, 波が成長することができないことは明らかである. Eady や Charney のような連続モデルでは, 不安定解対し全ての高度においてトラフに沿って収束が存在する.

Gall(1976), Simmons and Hoskins(1977) は, 平均的な北半球の条件を表すような東西風のプロファイルの安定性の特性を数値的に決定した. 彼らは, 最も不安定な波の波長が約 2000 km であることを発見した. この波長は, この節で考えた簡単なプロファイルに対しては, 4000 km に対応する. これらの波長の短い不安定波は, 対流圏下層においてのみ大きな振幅を持つ. Staley and Gall(1977) は, そのような波長の短い不安定波が対流圏下層の静的安定と風のシアにとても鋭敏であることを示した. Gall, etal(1979) は, 摩擦や有限振幅の効果によって長波が支配的になることを示した. しかしながら, 短波はより小規模な地表の擾乱の成長において依然として重要であるだろう.

4.11 鉛直方向のエネルギー伝搬

大気の全質量の約 8 割は対流圏に存在するために, 対流圏は大気の運動エネルギーの大部分を含んでいる. もし反射や吸収が存在しなければ, このエネルギーの大部分は対流圏界面の上側へと輸送され, 大変大きな応答が存在するだろう. 音波や重力波の解 (2.4.11) は, 速度成分が $\rho^{-1/2}$ に比例して高さとともに増大するので波連の中でエネルギー密度は一定であり, そのような鉛直方向のエネルギー伝搬の様子を示唆している. しかしながら, 平均風を伴う非等温大気では, 鉛直方向のエネルギー伝搬は大幅に制限されるだろう.

この節では, 大規模な中緯度の擾乱における鉛直方向のエネルギー伝搬を準地衡風方程式系を使って調べることにする. 鉛直方向のエネルギー伝搬のより適切な取り扱いは, 数値予報モデルにおける長波に対してとても重要となる.

さまざまな平均風に伴う鉛直方向のエネルギー輸送についての情報のいくつかは, Eliassen and Palm(1960), Charney and Drazin(1961) に従うことで得られる. 速度 c で移動する中立波が存在すると仮定するならば, 線形化された熱力学第一法則 (4.7.43) は,

$$(U-c)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial Z}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial Z}+f_0^{-1}\Gamma\dot{Z}=0 \tag{4.11.99}$$

となる. ここで, この方程式に ψ を掛けて x について平均を取れば,

$$\overline{\psi\dot{Z}}=f_0\Gamma^{-1}(U-c)\,\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial Z}} \tag{4.11.100}$$

を得る. ψ は Φ' に比例するので, 左辺の項は「鉛直方向のエネルギーフラックス」を表している. また, $\overline{\partial\psi/\partial x\ \partial\psi/\partial Z}$ は極方向の熱フラックスを表す. (4.11.100) によれば, 鉛直方向のエネルギーフラックスは, 位相速度が平均風の速度と等しくなる任意の高度で ゼロにならなければならない. そのような高度近傍の解は非線形となり線形論は用いることはできないが, エネルギーはふつうこの高度からあまり遠くまで伝搬することはない. $U(Z)$ の鉛直構造は, 明らかに大気下層から上層へのエネルギー輸送にとても重要な影響を与える.

より多くの情報は, Charney and Drazin(1961) に従って, 準地衡風ポテンシャル渦度方程式 (4.7.40) を調べることによって得られる. 最初に U が y に依存しないと仮定し, $\psi=\Psi(Z)\cos\alpha y\ e^{ik(x-ct)}$ を (4.7.40) に代入すれば,

$$(U-c)\left[e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right)-(k^2+\alpha^2)\Psi\right]+\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}\Psi=0 \tag{4.11.101}$$

を得る．ここで，

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - e^Z \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial U}{\partial Z}\right)$$

である．次に，

$$Q = f_0(e^{-Z}/\Gamma)^{1/2}\Psi \tag{4.11.102}$$

なる新しい変数を導入すれば，(4.11.101) を準同型に書き換えることができる．これにより，(4.11.101) は次のようになる．

$$\frac{d^2Q}{dZ^2} + n^2 Q = 0. \tag{4.11.103}$$

ここで，

$$n^2 = -\frac{\Gamma}{f_0^2}(k^2+\alpha^2) - \Gamma^{1/2}e^{Z/2}\frac{d^2}{dZ^2}(e^{-Z/2}\Gamma^{-1/2}) + \frac{\Gamma\partial\bar{q}/\partial y}{f_0^2(U-c)} \tag{4.11.104}$$

である．(4.11.103) は，屈折率 $n(Z)$ の媒質内における一次元の波動伝播を表す方程式の形をしている．その解の振る舞いは，おおまかには次のようになる．

$n^2 > 0$: $Q(Z)$ は Z に伴って振動し，エネルギーの鉛直伝播が許容される．

$n^2 < 0$: $Q(Z)$ は Z に伴って指数関数的に変化し，エネルギーの鉛直伝播は抑制あるいは補足される．

この振る舞いは，U と Γ が一定である層を考えるならば，より簡単に理解される．このとき，(4.11.104) は，

$$n^2 = -\frac{\Gamma}{f_0^2}\left[k^2+\alpha^2+\frac{f_0^2}{4\Gamma} - \frac{\beta}{(U-c)}\right] \tag{4.11.105}$$

となり，層内において n^2 は定数となる．このとき，(4.11.103) の解は e^{inZ} と e^{-inZ} の線形結合である．したがって n が実数ならば，明らかに解は鉛直方向に伝播可能であり，流線関数の振幅は $e^{Z/2}$ のように変化する ((4.11.102) を参照)．しかしながら n が虚数のときは，解は $e^{|n|Z}$ と $e^{-|n|Z}$ の線形結合である．流れが不安定でない限り振幅はエネルギー源を離れて増大できないので，エネルギー源が層の下側にあるとき，鉛直上向きに対して減衰する解 ($e^{-|n|Z}$) が選ばれなければならない．

Charney and Drazin(1961) は，加熱や山岳の強制によって励起される強制定常波に対して，(4.11.105) を適用した．(4.11.105) において $c=0$ とするならば，エネルギーの自由伝播に対する条件 ($n^2>0$) は，

$$0 < U < \frac{\beta}{k^2+\alpha^2+f_0^2/4\Gamma} \tag{4.11.106}$$

となる．よって, 定常波が鉛直伝播するためには, 平均流は西風でなければならないが, 強すぎてはならない．実際, 彼らは, (4.11.106) の右辺の最大値が 38 m/s であると推定した．このようなことは大規模な運動に対して発生する．隣り合う次の層に対しても (4.11.106) が適用されるならば, U が Z の関数である大気においても, この結果は利用できるだろう．

夏季の間, 成層圏では東風であるために, エネルギーの鉛直伝播は成層圏のあまり遠方までは到達できない．しかし, Matsuno(1970) は, 平均流に水平シアが存在するとき, エネルギーが極夜ジェットへ向かって上方に伝搬することを示した．(4.11.106) の条件は長波 (小さな k) の鉛直伝播に有利であり, また成層圏の観測は短波のエネルギーがあまり存在しないことを示している．Charney and Pedlosky(1963) は, 傾圧不安定波が鉛直方向には補足されることを示した．Holton(1975) では, 成層圏の力学と対流圏との相互作用の詳細が取り扱われている．大気中の長波の数値予報は, 鉛直方向のエネルギー伝播の適切な取り扱いにとても依存する．このことについては, 7 章 10 節で議論する．

4.12 順圧赤道波

いくつかの大気運動の構造は, 赤道付近で著しく変えられる. 一部の赤道波解において, ロスビー波と慣性重力波との間の違いはとても不明瞭となる. 次節では, 順圧モデルを用いて赤道波の水平構造を調べる. また, 赤道波の鉛直構造は次節で扱うことにする.

今から行う解析は, Matsuno(1966a) に従う. 彼は, 赤道波を解析的に調べるために, 赤道ベータ面 ($f = \beta y$) における浅水方程式を採用した. これらの方程式を非運動状態のまわりで線形化するとき, 方程式系は次のように書かれる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \beta y v &= 0, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \beta y u &= 0, \\
\frac{\partial \phi}{\partial +}\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.12.107}
$$

ここで, $\phi = gh$, $\Phi = gH$ である.