

## 第2章 大気の波動運動パート1

### 2.1 イントロダクション

図 2.1.1 で示されるような水平方向の空間スケールと時間スケールをもつ大気現象には多様性がある。ここでは、熱帯と中緯度は分別的に説明される。そして水平スケールは、惑星スケール・総観スケール・メソスケール・対流スケール・マイクロスケールの5つに分かれる。この章では、線形化された大気の予報方程式から得ることができる波動解の種類を調べる。いくつかの解は図 2.1.1 中のどの現象にも対応しないが、数値予報モデルの構築のために必要な情報となる。

### 2.2 方程式の線形化

非常に複雑な大気の運動を理解するために、この章では運動をいくつかの単純なタイプに切り分けて分析することにする。この目的のために、 $x-z$  平面のみの運動を考えよう。 $y$  方向に対しては運動は一樣であると仮定し、また地球の自転・摩擦・非断熱加熱は無視する。このとき、運動方程式、熱力学方程式、連続の式はそれぞれ次のような形式で表現される。

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{dw}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g &= 0 \\
 \alpha \frac{dp}{dt} + p\gamma \frac{d\alpha}{dt} &= 0 \\
 \alpha \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{d\alpha}{dt} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2.1}$$

ここで、 $\gamma = c_p/c_v$  である。また、ここでは  $\mathbf{V} = (u, w)$ 、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$  であることに注意されたい。

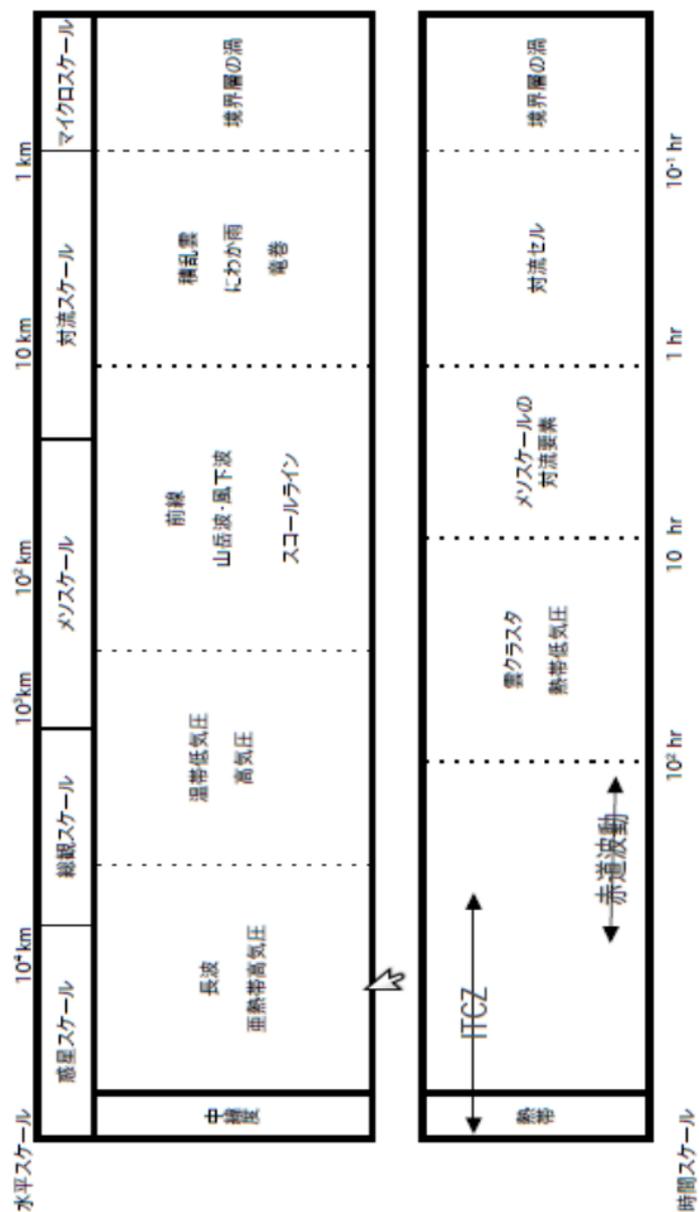


図 2.1.1: 空間・時間スケールを関数とする大気現象

これらの方程式を線形化するために摂動法を用いることにする。簡単化のために、一定の水平基本流  $U$  と静水圧平衡にある基本状態の力学的変数  $\bar{p}(z), \bar{\alpha}$  を仮定しよう。このとき、

$$\bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g$$

が満たされる。次に、依存変数を基本場（非摂動成分）と摂動場の和として表現しよう。すなわち、すべての依存変数は次のように基本場と摂動場に分割されることになる。

$$\begin{aligned} u &= U + u', & w &= w' \\ p &= \bar{p}(z) + p', & \alpha &= \bar{\alpha}(z) + \alpha' \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

を (2.2.1) 代入し、基本場に対して成り立つ静水圧平衡の式 (2.2) で引けば、次の摂動場に対する線形方程式を得る。ただし、摂動量同士の積は2次の微小量として無視した。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0 \\ \delta_1 \left( \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{a'}{\bar{\alpha}} g &= 0 \\ \bar{\alpha} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - gw' + \bar{p}\gamma \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) &= 0 \\ \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \bar{\alpha} - \delta_2 \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right) - w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

ここで、 $\delta_1, \delta_2$  は後ほど行う解析において、特定の鉛直加速度の項と圧縮性に関わる項を含めるかどうかによって、1または0の値を取るようになる。

## 2.3 純粋な音波

音波は,  $g = 0$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$  と設定し,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{p}$  を定数とすることによって分離することができる圧縮性波動である. ここで, 摂動場が次のような定数の係数をもつ  $x, y, t$  について周期関数であると仮定する.

$$\begin{aligned} u' &= S \exp[i(kx + mz - \sigma t)], & w' &= W \exp[i(kx + mz - \sigma t)] \\ p' &= P \exp[i(kx + mz - \sigma t)], & \alpha' &= A \exp[i(kx + mz - \sigma t)] \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

これらは,  $x, z$  方向の波数がそれぞれ  $k, m$ , 振動数が  $\sigma$  であるような一定の振幅をもつ平面波を表す. 実際の物理量は解の実部を取ることによって得られる. 方程式 (2.2.3) は線形であるので, 上のように表される平面波解の任意の線形和もまた解となる. よって, 単色の平面波解のみをここでは考えることにする. (2.3.4) を (2.2.3) に代入すれば, 振幅  $S, W, P, A$  に対する線形代数方程式系の行列形式

$$\begin{bmatrix} (kU - \sigma) & 0 & \bar{\alpha}k & 0 \\ 0 & (kU - \sigma) & \bar{\alpha}m & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}(kU - \sigma) & \bar{p}\gamma & (kU - \sigma) \\ \bar{\alpha}k & \bar{\alpha}m & 0 & - & (kU - \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ W \\ P \\ A \end{bmatrix} = 0 \quad (2.3.5)$$

を得る. 振幅  $S, W, P, A$  が非ゼロとなるのは, 連立一次方程式の係数行列の行列式がゼロとなるときのみである. この行列式が展開されるとき次の分散関係式を得る.

$$\bar{\alpha}(kU - \sigma)^2 [-(kU - \sigma)^2 + \gamma\bar{p}\bar{\alpha}(k^2 + m^2)] = 0 \quad (2.3.6)$$

4 次方程式であるので解は 4 つある. 最初の 2 つは,

$$\sigma = \pm kU$$

であり, これは単に移流に対応する. 残りの 2 つは,

$$\sigma = kU \pm (k^2 + m^2)^{1/2} \sqrt{\gamma R \bar{T}}$$

である. ここで, 基本場に対する状態方程式を用いた. 平均風の存在は, 単に  $x$  方向の伝搬速度に  $U$  を加えるということに注意されたい.

位相速度は, 法線方向の位相線 ( $kx + mz = \text{constant}$ ) の速度である. 位相速度は振動数と次のように関係づけられる.

$$c = \sigma \lambda / 2\pi$$

ここで,  $\lambda$  は位相線に垂直な波長である. 各方向の波長は波数ベクトルの各成分を使って  $\lambda_x = 2\pi/k$ ,  $\lambda_z = 2\pi/m$  と書けることを用いれば, 三角法により  $\lambda =$

$2\pi(k^2 + m^2)^{-1/2}$  を導くことができる\*1. 波長  $\lambda$  に対するこの関係を用いれば, 位相速度は

$$c = \sigma(k^2 + m^2)^{-1/2} \quad (2.3.7)$$

と書ける. よって,  $U = 0$  とすれば (2.3) から次の位相速度を得る.

$$c = \pm \sqrt{\gamma R \bar{T}} \quad (2.3.8)$$

これはよく知られている音速の公式である. 音速は伝搬の方向に独立である (非分散) であることに注意されたい.

## 2.4 音波と内部重力波

重力波は, 同じ高度に存在する異なる密度をもった流体要素に働く異なった重力の効果から発生する. 重力の効果を含めるときには, 静水圧平衡の式や状態方程式

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g \\ \bar{p} \bar{\alpha} &= R \bar{T} \end{aligned}$$

によって支配されるような  $\bar{p}$  や  $\bar{\alpha}$  の高度依存性を考える必要がある. 等温大気に対して, これらの方程式の解は

$$\bar{p}(z) = \bar{p}(0)e^{-z/H}, \quad \bar{\alpha}(z) = \bar{\alpha}(0)e^{z/H} \quad (2.4.9)$$

となる. ここで,  $H = R\bar{T}/g$  はスケールハイトである. 基本流  $U$  は  $x$  方向の位相速度を  $U$  だけ単に増加させるだけなので, ここでは  $U = 0$  とする. このとき支配方

---

\*1波数ベクトルは反変ベクトルであるので, 波数ベクトル  $k$  の成分  $(k, m)$  に対して,

$$|k| = (k^2 + m^2)^{1/2}$$

が成り立つ.

しかしながら, 波長の各方向成分に対しては上のような関係は成り立たない. 波長の大きさ  $\lambda$  と波長の各方向成分  $(\lambda_x, \lambda_z)$  の関係は, 幾何的な証明により

$$\lambda = 2\pi / (\lambda_x^2 + \lambda_z^2)$$

となる. これは波長は共変ベクトルであることを意味している.

程式系 (2.2.3) は,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0 \\
 \delta_1 \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{a'}{\bar{\alpha}} g &= 0 \\
 \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial t} - g w' + \bar{p} \gamma \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) &= 0 \\
 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \bar{\alpha} - \delta_2 \frac{\partial \alpha'}{\partial t} - w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

となる. この条件下において次の形式をもつ単純な波動解を考えよう.

$$\begin{aligned}
 u' &= S \bar{\alpha}^{1/2} e^{i(kx+mz-\sigma t)}, & w' &= W \bar{\alpha}^{1/2} e^{i(kx+mz-\sigma t)} \\
 p' &= S \bar{\alpha}^{-1/2} e^{i(kx+mz-\sigma t)}, & \alpha' &= W \bar{\alpha}^{3/2} e^{i(kx+mz-\sigma t)}
 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

これらを (2.4.10) に代入して整理し, 行列形式で表現すれば

$$\begin{bmatrix}
 -\sigma & 0 & k & 0 \\
 0 & -\delta_1 \sigma & m + \frac{i}{2\alpha} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} & ig \\
 0 & \left( -g + \frac{\gamma R \bar{T}}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) i & -\sigma & \gamma R \bar{T} \sigma \\
 k & m + \frac{i}{2\alpha} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} & 0 & \delta_2 \sigma
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 S \\
 W \\
 P \\
 A
 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.4.12}$$

となる. ここで, 上の行列要素は位置または時間に依存しない関数である. (2.4.9) を導入し上の行列の行列式がゼロとなるようにすれば, 次の分散関係式を得る.

$$\begin{aligned}
 \delta_1 \delta_2 \sigma^4 - \{ \gamma R \bar{T} (\delta_1 k^2 + m^2) + \frac{g}{4H} [(2\delta_2 - 1)\gamma + 2(1 - \delta_2)] \\
 + g(1 - \gamma)(\delta_2 - 1)im \} \sigma^2 + k^2 g^2 (\gamma - 1) = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

鉛直方向の波長  $2\pi/m$  が  $4\pi H$  よりも小さいとき,  $\sigma^2$  の係数の中の  $g$  の項を  $\gamma R \bar{T} m^2$  に比べて無視することができるだろう. この近似は多くの場合において適用される. 最後の項を温位を使って書き直せば,

$$\delta_1 \delta_2 \sigma^4 - \gamma R \bar{T} (\delta_1 k^2 + m^2) \sigma^2 + \gamma R \bar{T} \cdot k^2 \frac{g}{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \tag{2.4.14}$$

を得る.

この方程式の 4 根は, 音波の 2 根と内部重力波の 2 根に対応する. 重力波は  $g = 0$  とおくことによって除外され, このとき残る解は音波だけとなる. 重力波を音波から分離するためには,  $\delta_2 = 0$  (非圧縮) と  $\delta_1 = 1$  とすればよい. 分離された重力波の振動数は

$$\sigma^2 = \frac{k^2 \frac{g}{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{k^2 + m^2} \tag{2.4.15}$$

となる。この振動数に対応する波の位相速度は、

$$c = \frac{\sigma}{|k|} = \pm \frac{k}{k^2 + m^2} \left( \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (2.4.16)$$

である。なお、この式は等温大気でなくても導出することができる。鉛直方向の温度減率が断熱温度勾配より大きい ( $\partial\theta/\partial z > 0$ ) とき、これらの重力振動は安定となる。一方、鉛直方向の温度減率が断熱温度勾配より小さい ( $\partial\theta/\partial z < 0$ ) とき、増幅する擾乱が発生する。

擾乱の深さが水平スケールに比べて大きい ( $k^2 \gg m^2$ ) ならば、(2.4.15) は

$$\sigma \simeq \pm \left( \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (2.4.17)$$

と書ける。これは、本質的な鉛直方向の振動に対するブラント-ヴァイサラ (Brunt-Vaisälä) 振動数である。一方、鉛直スケールが水平スケールよりもはるかに小さいとき静水圧平衡の近似が妥当となり、(2.4.14) において  $\delta_1 = 0$  として良い。この場合、対応する振動数は

$$\sigma^2 = \frac{k^2}{m^2} \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (2.4.18)$$

となる。このことは、 $m^2 \gg k^2$  のとき (2.4.15) から導かれる。鉛直方向に変化を伴う水平方向に伝搬する解は、鉛直方向の波数  $m$  と  $-m$  の2つの単色平面波解を足し合わせることで次のように作ることができる。

$$e^{i(kx+mz-\sigma t)} + e^{i(kx-mz-\sigma t)} = 2 \cos mz e^{i(kx-\sigma t)}$$

このことは、振動数  $\sigma$  が鉛直方向の波数  $m$  の符号に依存しない限り成り立つ。上の解の形式をもつとき波の伝搬は水平的であり、その位相速度は

$$c = \frac{\sigma}{k} = \pm \frac{1}{m} \left( \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (2.4.19)$$

となる。ここで、 $k$  の正負にかかわらず同じ振動数の組を与えることに注意されたい。

音波が重要な力学的役割を果たす気象現象は存在しないので、多くの場合これらを方程式の解から取り除くことが望まれる。(2.4.14) から分かるように、静水圧平衡近似 ( $\delta_1 = 0$ ) または非圧縮条件 ( $\delta_2 = 0$ ) が適用されるならば、音波は解から取り除かれる。内部重力波は、熱対流や風下波といった小規模な大気運動に対して重要である。解の形式 (2.4.11) における速度の振幅の  $\bar{\alpha}^{1/2}$  依存性に見られるように、内部重力波は適切な条件下でエネルギーを大気上層へと伝搬するだろう。また、内部重力波は地衡風調節とよばれる役割も果たす。

方程式系 (2.2.3) は等温大気に対して (2.4.11) とは異なる形式の波動解をさらに持っている。これらの波動は鉛直速度はゼロで、音速で水平方向に伝搬する。このことは、次の形式の解が (2.2.3) を満たすことを確認することで示される。

$$\begin{aligned} u' &= S e^{(\gamma-1)z/\gamma H} e^{ik(x-ct)}, \\ w' &= 0, \\ p' &= P e^{-z/\gamma H} e^{ik(x-ct)}, \\ \alpha' &= A e^{(2\gamma-1)z/\gamma H} e^{ik(x-ct)}. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

ここで、 $c = \pm \sqrt{\gamma R \bar{T}}$  である。この解はラブ波(Lamb wave) と呼ばれる<sup>\*2</sup>。この波は、自動的に境界で  $w = 0$  の条件を満たすということに注意されたい。そしてこの解は、後に述べる外部重力波ととてもよく似ている。ラブ波は大気にわずかなエネルギーしか運ばないが、静水圧平衡の式の数値積分で用いられる最大の時間ステップを厳しく制限するために数値予報において重要である。

## 2.5 表面重力波

この章では対流圏を一層の均質な非圧縮流体によって置き換えることを考えよう。その結果導かれる数学的・物理的により簡単な解は、より複雑な大気のプロセスの理解の助けとなるだろう。

流体は非圧縮かつ均質であるので、 $\alpha' = 0$  である。また、上部表面は自由表面であるとしよう。方程式系 (2.2.3) の運動方程式と連続の式は次のようになる。ただ

<sup>\*2</sup>等温大気において  $w' = 0$  となる波動解が、(2.4.20) の形式の解を持つことを確認しよう。 $w' = 0$  のとき (2.2.3) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, & \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{a'}{\bar{\alpha}} g &= 0 \\ \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{p} \gamma \frac{\partial \alpha'}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial u'}{\partial x} \bar{\alpha} - \frac{\partial \alpha'}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

上の4式において、摂動場の変数として  $p'$  だけを残すように他の変数を消去すれば

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = -\frac{g}{c_s^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + c_s^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$$

の2式を得る。ここで、 $c_s^2 = \gamma R \bar{T}$  は音速である。これにより圧力の摂動場は、等温大気のスケールハイト  $H (= R \bar{T} / g)$  を用いて

$$p' = P e^{-z/\gamma H} e^{ik(x-c_s t)} \quad (2.4.21)$$

となることが求まる。残りの摂動場の変数  $u', \alpha'$  の解については、求めた  $p'$  をもとの方程式に代入することで得られる。

し、摂動量を表すプライムを省略した.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.5.22a)$$

$$\delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \bar{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.5.22b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5.22c)$$

静水圧平衡の式は基本場に対して適用される.

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g \quad (2.5.23)$$

この方程式を  $z = 0$  から静止状態の流体層上端  $H$  まで積分すれば,  $z = 0$  における圧力  $p_0 = g\bar{\rho}H$  を得る. 次に, 摂動量が調和振動の形式を持つと仮定すれば

$$\begin{aligned} u &= \psi(z)e^{ik(x-ct)} \\ w &= \Phi(z)e^{ik(x-ct)} \\ p/\bar{\rho} &= P(z)e^{ik(x-ct)} \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

これらを (2.5.22a) に代入し, 整理すれば

$$\begin{aligned} (U - c)\psi(z) + P(z) &= 0 \\ ik\delta(U - c)\Phi(z) + \frac{dP(z)}{dz} &= 0 \\ ik\psi(z) + \frac{d\Phi(z)}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

を得る. 最初の 2 式から  $P(z)$  を消去し, さらにその結果の方程式と上の最後の方程式使って  $\psi(z)$  を消去すれば,

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} - k^2\delta\Phi(z) = 0 \quad (2.5.26)$$

となる. ここで, 鉛直加速度を許可する  $\delta = 1$  の場合と摂動場も静水圧平衡である  $\delta = 0$  の場合をそれぞれ考えよう. 上の常微分方程式の解は,

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= a_1 e^{kz} + a_2 e^{-kz} \quad \delta = 1, \\ \Phi(z) &= a'_1 z + a'_2 \quad \delta = 0. \end{aligned}$$

となる. ここで,  $a_1, a_2, a'_1, a'_2$  は境界条件によって決定される任意定数である. 下端境界が水平であると仮定されるとき, 鉛直速度はゼロとなる. よって鉛直加速度が存在する場合 ( $\delta = 1$ ) では  $a_1 = -a_2 = a$  となり,

$$\Phi(z) = a(e^{kz} - e^{-kz}) \quad \delta = 1 \quad (2.5.27)$$

この式の指数関数の項をべき級数展開すれば、次の近似を得る.

$$\Phi(z) = 2akz + \dots$$

一方、摂動場も静水圧平衡にある場合 ( $\delta = 0$ ) には  $a'_2 = 0$  となり、 $a'_1 = a$  と置き換えれば、

$$\Phi(z) = az. \quad (2.5.28)$$

2つ目の境界条件として、(境界で維持されなければならない) 表面の流体要素の全圧力が不変だとする。故に、自由表面において

$$\frac{d(\bar{p} + p)}{dt} = 0$$

が満たされなければならない。この式を線形化することによって近似し、 $z = H$  に対してこの条件を適用する。よって、

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = H \quad (2.5.29)$$

解 (2.5.27) および (2.5.28) を用いることで、方程式系 (2.5.25) は次の結果を与える。

最初に非静水圧平衡 ( $\delta = 1$ ) のときを調べる。このとき振幅の解は

$$\Phi(z) = 2a \sinh(kz), \quad \psi(z) = 2ia \cosh(kz), \quad P(z) = -2ia(U - c) \cosh(kz)$$

となる。これを (2.5.29) に代入し整理すれば、

$$c = U \pm \left[ \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) \right]^{1/2} \quad (2.5.30)$$

を得る。

次に静水圧平衡 ( $\delta = 0$ ) のときを調べる。このとき振幅の解は

$$\Phi(z) = az, \quad \psi(z) = \frac{ia}{k}, \quad P(z) = -\frac{ia(U - c)}{k}$$

となる。これを (2.5.29) に代入し整理すれば、

$$c = U \pm \sqrt{gH} \quad (2.5.31)$$

を得る。

(2.5.31) によって与えられる位相速度で伝搬する波は、一般的に浅水波(shallow water wave) や長波重力波と呼ばれる。一方 (2.5.30) において  $H/\lambda$  が相対的に大きいとき、位相速度は

$$c \simeq U \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

と近似される。この波は深水波(deep-water wave) と呼ばれ、流体要素の軌道はほとんど円軌道となる。一方  $H/\lambda$  が相対的に小さいとき、(2.5.30) は (2.5.31) となり、流体要素の軌跡は大きく伸ばされた楕円軌道となるために、ほとんど水平線となる。今均質な大気を仮定するならば静水圧平衡の式から  $gH = p_0/\rho = RT$  であるので、(2.5.31) は

$$c = U \pm \sqrt{RT} \quad (2.5.32)$$

と書き直される。浅水波は (2.3.8) で与えられる音波やラブ波と同じぐらいの位相速度をもつ。

(2.5.31) で与えられる浅水波の位相速度は、鉛直加速度を無視したときに得られる。この結果は、次のようなより直接的な手法を用いても得られる。まず、密度が一定である均質な流体に対して静水圧平衡を仮定しよう。これにより速やかに流体中の任意の点において、

$$g\bar{\rho}(h - z) = p \quad (2.5.33)$$

が成り立つ。ここで、 $h$  は自由表面の高度である。次に  $u = U + u'$ ,  $h = H + h'(x, t)$ ,  $p = \bar{p}(z) + p'(x, z, t)$  とおく。このとき、例えば圧力勾配の項は上の式を用いて

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = g \frac{\partial h'}{\partial x} \quad (2.5.34)$$

となる。

よって、(2.5.22a) の第1式目は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (2.5.35)$$

と書ける。

続いて  $u$  と  $h$  に対する2つ目の方程式の導こう。(2.5.35) において  $h$  は  $z$  に依存しないので、 $u$  が最初  $z$  に依存しないとここで仮定すれば  $u$  は鉛直方向に依存しない。また、地表は水平だと仮定すれば  $z = 0$  において  $w = 0$  となる。このとき (2.5.22a) の第3式目の連続の式を  $z = 0$  から  $h$  まで鉛直方向に積分することにより、

$$w_{z=h} = -\frac{\partial u}{\partial x} h.$$

また

$$w_{z=h} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$$

であるので、2式を結合すれば

$$\frac{\partial(\bar{\rho}h)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}uh)}{\partial x} = 0 \quad (2.5.36)$$

を得る。さらに線形化して簡単化すれば、

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial t} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.5.37)$$

となる。

今  $h$  と  $u$  は  $z$  に依存しない関数なので、摂動場の依存変数は次の形式を持つだろう。

$$u' = u_0 e^{ik(x-ct)}, \quad h' = h_0 e^{ik(x-ct)}$$

ここで、 $u_0$  と  $h_0$  は定数である。上の表現を (2.5.35) と (2.5.37) に代入し、線形代数方程式の係数行列の行列式をゼロとすれば、浅水波に対する位相速度を再び得る。

$$c = U \pm \sqrt{gH}$$

ここで示した重力波は流体の境界で最大の振幅を持つので、ふつう外部重力波 (external gravity wave) と呼ばれる。また、密度の不連続面が存在するもしくは密度が連続的に変化するとき生じる重力波として、内部重力波 (internal gravity wave) も存在する。連続的に変化する密度場において発生する内部重力波の伝搬速度は前に示したものと大きく異なる。例えば Haltiner and Martin(1957) では、半無限に広がる2つの層が密度と速度の両方の0次の不連続によって分割される簡単な場合を考えている。その場合に波の速度は、

$$c = \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'} \pm \left[ \frac{g\lambda(\rho - \rho')}{2\pi(\rho + \rho')} - \frac{\rho\rho'(U - U')^2}{(\rho + \rho')^2} \right]^{1/2}$$

となる。ここで、プライムなしは下側、プライムありは上側のパラメータを表す。また、この結果を得るために無限遠において摂動はゼロとなることを仮定している。上の式において  $\rho' = 0$  とすることで、前述した深水波に対する位相速度の式が再び得られる。他の特別な場合として、 $U = U'$  とすればシアなしの波、 $\rho = \rho'$  とすれば純粋なシア波も含んでいる。上の式の根号内の符号が負となる場合には位相速度は複素数となり、不安定な波が生じる。これらの成長する解はケルビン・ヘルムホルツ波 (Kelvin-Helmholtz wave) と呼ばれる。

## 2.6 慣性重力波とロスビー波

この章では地球の自転の効果が、前章で導いた静水圧近似下にある均質モデルの方程式に加えられる。コリオリ力によって引き起こされる流体要素の進行方向のぶれは、低振動数の重力波に影響を与えるだろう。また、ロスビー波はコリオリパラメータの空間的な変化に依存するということが分かるだろう。前章までに導いた均質モデルの運動方程式に地球の自転効果が加わるとき、方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.6.38a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2.6.38b)$$

静水圧平衡と密度一定の仮定のために、水平圧力勾配力は高さに依存しない。速度場が初期に高さに依存しない仮定すれば、以後速度場は高さに依存しない状態を維持するだろう。よって、上の式では鉛直移流項が除去されている。非圧縮の仮定により、連続の式は線形である。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6.39)$$

また (2.5.36) を得るときと同じようにすれば、 $u$  と  $h$  に対する方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (2.6.40)$$

を得る。(2.6.38a), (2.6.38b), (2.6.40) は未知数 3 つ ( $u, v, h$ ) を含む 3 本の方程式の系を構成する。これらの方程式は浅水方程式 (shallow-water equation) と呼ばれる。このモデルに対する渦度方程式は (2.6.38b) を  $x$  で微分, (2.6.38a) を  $y$  で微分し、それらの式の差を取ることで得られる。さらに (2.6.40) を用いることによって、結果的に渦度方程式は、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v = -(f + \zeta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (f + \zeta) \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad (2.6.41)$$

と書ける。ここで、コリオリパラメータ  $f$  は  $y$  だけに依存するとし、 $\beta = \partial f / \partial y$  とした。上の式をさらに変形すれば、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\zeta + f}{h} \right) = 0 \quad (2.6.42)$$

を得る。この方程式は  $(\zeta + f)/h$  という量がラグランジュ的に保存することを示している。このラグランジュ保存量は、ポテンシャル渦度 (potential vorticity) と呼ば

れる。ここで導いたポテンシャル渦度の形式は浅水系に対する特別な場合であるが、一般的なポテンシャル渦度理論は Ertel(1942) によって導かれた。(2.6.42) は、移動する流体コラムの高さ変化の効果を考えることによって分かるように、絶対角運動量の保存に対応している。非圧縮な流体に対してコラムの高さが増加するとき、コラムの断面積は減少する。このとき、絶対角運動量の保存によればコラムはより早く回転しなければならない。コラムの角速度は  $(\zeta + f)/2$  であるので、このことは (2.6.42) と一貫性がある。

(2.6.38a), (2.6.38b), (2.6.40) において、従属変数を

$$h = H + h', \quad u = U + u', \quad v = v'$$

として方程式を線形化することを考えよう。今  $U$  は定数であり、 $H$  と  $U$  は地衡風の関係で関連付けられているとする。すなわち、

$$U = -\frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial y} \quad (2.6.43)$$

の関係を満たす。ここで、 $H$  は密度一定な流体の深さの非摂動成分であるが、大きさが一定な地衡風  $U$  を生み出すように  $y$  方向にのみ線形に変化することに注意されたい。簡単化のために摂動量および  $f$  が  $y$  に依存しないと仮定すれば、方程式系は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} \right) - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + fu &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6.44)$$

ここで、摂動量を表すプライムは省略した。また、 $\delta$  は発散方程式における  $dD/dt$  に寄与する項を区別する ( $D = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y$ )。一般的な発散方程式は運動方程式の  $x, y$  成分をそれぞれ  $x$  と  $y$  で微分し加えることによって得られる。今回の場合は  $v$  が  $y$  に依存しないので、 $u$  が全体の発散を生み出すことに注意されたい。次に、係数の  $H$  を定数として取り扱い、摂動が次のような調和振動であると仮定する。

$$u = u_0 e^{ik(x-ct)}, \quad v = v_0 e^{ik(x-ct)}, \quad h = h_0 e^{ik(x-ct)}$$

これにより、(2.6.44) は次のような線形な代数方程式に変換される。

$$\delta(U - c)iku_0 - fv_0 + gikh_0 = 0 \quad (2.6.45)$$

$$fu_0 + ik(U - c)v_0 = 0 \quad (2.6.46)$$

$$ikHu_0 + \partial H/\partial y v_0 + ik(U - c)h_0 = 0 \quad (2.6.47)$$

上の線形な代数方程式が振幅  $u_0, v_0, h_0$  に対して非自明な解を持つためには、係数行列の行列式がゼロでなければならない。この行列式を展開することで、振動数に対して3次の分散関係式を得る。

$$\delta(U - c)^3 - (gH + f^2/k^2)(U - c) - \frac{fg}{k^2} \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (2.6.48)$$

この方程式は位相速度の早い重力波の組の解と位相速度の遅い気象学的な波の解を含む。前者の解を分離するために、 $U = 0, \delta = 1$  とすれば分散関係式は

$$c = \pm \sqrt{gH + f^2/k^2} \quad (2.6.49)$$

と  $c = 0$  を与える。これらは慣性重力波 (inertial gravity wave) であり、 $f = 0$  のときは (2.6.49) は浅水波の位相速度の式となる。

根号内の1つ目の項が2つ目の項に対して無視できるならば、慣性振動が分離される。

$$\sigma = kc = \pm f \quad (2.6.50)$$

この条件は、波の波長スケール ( $1/k$ ) が十分に大きいか、 $gH$  が十分に小さいときに当てはまる。なお、この慣性解は圧力勾配項を無視した非線形な運動方程式から直接導かれる圧力勾配項を無視した運動方程式は、

$$\frac{du}{dt} = -fv, \quad \frac{dv}{dt} = fu$$

上の2式から、一方の変数を消去すれば

$$\frac{d^2u}{dt^2} + f^2u = 0$$

を得る。この方程式の解は  $u = u_0 e^{\pm ift}$  の形式を持ち、直接的に慣性解が導かれた。慣性振動の周期は  $2\pi/f = 12/\sin \phi$  hour であることが分かる。

この解析の人為的な点は、圧力勾配項を無視するために圧力を一定と仮定した点である。一方自然では、圧力場の調整は質量場と風速場との不均衡によって生じる重力波によって引き起こされる。それにもかかわらず、自然現象の中で上で示した慣性効果は数多く観測される。

(2.6.48) のゆっくりした気象学的な波の解は,  $\delta = 0^{*3}$  とすることで得られる.

$$c = U + \frac{(f/H) \partial H / \partial y}{k^2 + (f^2/gH)}$$

この式は, ポテンシャル渦度の基本場  $\bar{q} = f/H$  を使って書くことができる.  $\bar{q}$  を  $y$  で微分すれば,

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = -\frac{f}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{f^2 U}{gH^2} \quad (2.6.51)$$

今地衡風の平均流が存在するために, 自由表面の高さ  $H(z)$  は  $y$  方向に対して傾いている. したがって, ポテンシャル渦度の基本場は  $y$  方向に勾配を持っている. (2.6.51) を使って位相速度を書き直せば,

$$c = U - \frac{H \partial \bar{q} / \partial y}{k^2 + (f^2/gH)} \quad (2.6.52)$$

となる. この解はロスビー波 (Rossby wave) の一種<sup>\*4</sup>であり, この位相速度は観測される総観規模の擾乱の位相速度とまざまま合っている. この定式化は,  $f$  に緯度方向の変化を許すことで一般化することができる. この場合, ポテンシャル渦度の南北勾配は

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \left( \beta - \frac{f}{H} \frac{\partial H}{\partial y} \right) / H = \frac{\beta + (f^2 U / gH)}{H} \quad (2.6.53)$$

と書ける. ここで,  $\beta = df/dy$  である. これは, ロスビー波が平均流に対して  $k \times \nabla \bar{q}$  の方向に伝搬するという規則の一例である.  $f$  の変化を伴うロスビー波の位相速度は, (2.6.52) の  $\partial \bar{q} / \partial y$  に (2.6.53) を用いることによって与えられる. このことは,  $y$  方向に対する運動方程式を線形化された渦度方程式に置き換えて, 同様の解析を行なうことで示される.

(2.6.44) で  $\delta = 0$  とすることによって, ロスビー波は (2.6.48) において分離され得る. これにより速度摂動の南北成分  $v$  は地衡風となる. すなわち,

$$fv = g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (2.6.54)$$

<sup>\*3</sup> $\delta = 0$  のとき方程式系は

$$\begin{aligned} -fv + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + fu &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

となる.

<sup>\*4</sup>ここでは, 平均流としての地衡風の存在がポテンシャル渦度の基本場の南北勾配を非ゼロとした. (2.6.52) を見れば分かるように, ロスビー波の存在に必要であるのはポテンシャル渦度の基本場の南北勾配である. したがって, 平均流として地衡風の存在を許す代わりに, 底面の高さの変化あるいはコリオリパラメータの緯度依存性を許せば, 同様にロスビー波が解として含まれてくる.

しかし速度の東西成分  $u$  は発散<sup>\*5</sup>に比例し、地衡風の的に評価されない。

擾乱場が  $x$  と  $y$  の両方について変化するとき、この章での解析を行なうためには (2.6.38a) と (2.6.38b) を渦度方程式と発散方程式に置き換える必要がある。今回の場合は、発散方程式において発散の時間微分が無視されるときに、重力波が除去されることが示される。このことは、地衡風の条件のような風の回転部分と自由表面高度との間の関係を導く。

慣性重力波とロスビー波の2種類のそれぞれの波に対して、渦度と発散を比べてみよう。今回の場合、変数は  $y$  方向に依存しないと仮定しているため、発散と渦度の比は次のように簡単に書ける。

$$\left| \frac{D}{\zeta} \right| = \left| \frac{\partial u / \partial x}{\partial v / \partial x} \right| \quad (2.6.55)$$

最初に慣性重力波 ( $U = 0$ ) に対して、この比を求めてみる。(2.6.45) に  $e^{ik(x-ct)}$  を掛けることによって、

$$v = -\frac{if}{kc}u \quad (2.6.56)$$

位相速度  $c$  として慣性重力波の位相速度 (2.6.49) を用いれば、(2.6.55) は

$$\left| \frac{D}{\zeta} \right|_{I-G} = \sqrt{1 + k^2 g H f^{-2}} \quad (2.6.57)$$

となる。この量は常に1より大きい。よって、慣性重力波において渦度よりも発散が支配的である。

地衡風あるいはロスビー波解 ( $\delta = 0$ ) に対して、渦度や発散を  $h$  を使って書くと便利である。(2.6.54) から渦度は次のように書ける。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{k^2 g}{f} h. \quad (2.6.58)$$

また、(2.6.44) から  $u$  と  $h$  を関連付ける次の診断方程式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{f^2}{gH} u = \frac{U}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (2.6.59)$$

<sup>\*5</sup> $\delta = 0$  に対する方程式系を整理することにより、

$$u = -\frac{g}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (hU - Hu)$$

を得る。したがって、速度摂動の東西成分は  $(hU - Hu)$  という量の発散に比例する。

これは風の発散部分に対する準地衡風方程式である。この式を  $x$  で一階微分し、単色平面波解を導入すれば

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ikUg}{gH + (f^2/k^2)}h \quad (2.6.60)$$

を得る。(2.6.58) と (2.6.60) を (2.6.55) に代入することで、ロスビー波に対する発散と渦度の比を得る。

$$\left| \frac{D}{\zeta} \right|_R = \frac{(Uk/f)}{(k^2gH/f^2) + 1} \quad (2.6.61)$$

上の式において分子の量はロスビー数(Rossby number)と呼ばれ、総観規模の運動に対して約 0.1 ほどの値を持つ。分子は 1 よりも大きいので、ロスビー波に対して発散は渦度に比べて相対的に小さい。この情報は次章のスケール解析の定式化で役立つであろう。

## 2.7 初期条件の応答

本節と次節では、数値予報の初期化の取り扱いに必要な背景的知識を説明する。前節では2種類の波の運動が見つかった。片方は位相速度の速い慣性重力波であり、( $H = 10\text{km}$  に対して) 約  $300\text{ m/s}$  の位相速度を持つ。もう一つは位相速度の遅いロスビー波であり、約  $10\text{ m/s}$  ほどである。総観規模の気象現象の多くは、ロスビー波ぐらいの位相速度を持つ。このことは、総観規模の運動に対して慣性重力波は小さな振幅を持つことを示唆している。完全な方程式 ( $\delta = 1$ ) が予報に使われるとき、慣性重力波が小さな振幅を持つような方法で方程式を初期化することが重要となる。この問題は、任意の初期条件を表現するために前節の解を足し合わせることによって調べられる (Hinkelmann, 1951; Phillips, 1960)。ここでは、慣性重力波の解 (2つ) とロスビー波の解 (1つ) から近似的に与えられる位相速度を持つ3つの単色波の足し合わせを考えることにしよう。それぞれの単色波の位相速度を  $c_j (j = 1, 2, 3)$  とする。それぞれの  $c_j$  に対応して、速度成分 ( $u_j, v_j$ ) と自由表面の高度 ( $h_j$ ) に対する解の異なる組が存在するとする。しかしながら、(2.6.44) は同次方程式であるので、3つの量  $u_j, v_j, h_j$  のうち1つは各  $j$  に対して任意となる。そこで  $u_j = U - c_j$  と選び、 $\delta = 1$  とした (2.6.44) の前2式を他の振幅に対して解くことにする。その結果、

$$\begin{aligned} u_j &= U - c_j \\ v_j &= if/k \\ h_j &= g^{-1} [f^2/k^2 - (U - c_j)^2] \end{aligned} \quad (2.7.62)$$

となる。このとき特定の波数  $k$  に対して一般解は、

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^3 a_j u_j e^{ik(x-c_j t)} \\ v &= \sum_{j=1}^3 a_j v_j e^{ik(x-c_j t)} \\ h &= \sum_{j=1}^3 a_j h_j e^{ik(x-c_j t)} \end{aligned} \quad (2.7.63)$$

と書けるだろう。ここで、 $a_j$  は任意定数である。

$u, v, h$  の初期値が次の調和波で与えられると考えることにする。

$$u(x, 0) = u_0 e^{ikx}, \quad v(x, 0) = v_0 e^{ikx}, \quad h(x, 0) = h_0 e^{ikx}$$

ここで、 $u_0, v_0, h_0$  は複素定数である。これらの初期条件を (2.7.63) に代入すれば、

$$u_0 = \sum_{j=1}^3 a_j u_j, \quad v_0 = \sum_{j=1}^3 a_j v_j, \quad h_0 = \sum_{j=1}^3 a_j h_j$$

を得る。また、位相速度は次のように近似される。

$$\begin{aligned} c_1 &= U - \frac{U}{1 + (gHk^2/f^2)} \\ c_2 &= U + \sqrt{gH + (f^2/k^2)} \\ c_3 &= U - \sqrt{gH + (f^2/k^2)} \end{aligned} \quad (2.7.64)$$

(2.7.62) と (2.7.64) が適用されるとき、(2.7) を解くことにより次の  $a_j$  が与えられる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{ikf^{-1}gHv_0 - gh_0}{U^2f^4k^{-4}\alpha^{-2} - \alpha} \\ a_{2,3} &= \mp(u_0/2\alpha^{1/2}) \mp \frac{ifk^{-1}(1 \pm U\alpha^{-1/2})v_0 + gh_0}{2(Uf^2k^{-2}\alpha^{-1/2} \pm \alpha)} \end{aligned} \quad (2.7.65)$$

ここで、 $\alpha = gH + f^2k^{-2}$  である。

初期条件として地衝風を考えよう。

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x}$$

このとき対応する初期速度の振幅は、

$$u_0 = 0, \quad v_0 = ikf^{-1}gh_0 \quad (2.7.66)$$

となる。これらの条件を (2.7.65) に代入すれば、各  $j$  に対応する波の振幅

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{k^2f^{-2}gh_0}{1 - U^2f^4k^{-4}\alpha^{-3}} \\ a_{2,3} &= \frac{U\alpha^{-3/2}gh_0}{2(1 \pm Uf^2k^{-2}\alpha^{-3/2})} \end{aligned} \quad (2.7.67)$$

を得る。総観規模の擾乱に対しては、次の不等式が成り立つ。

$$\alpha^{1/2} > fk^{-1} \gg U \quad (2.7.68)$$

初期の  $v$  へのロスビー波の寄与 ( $v_1a_1 = ifk^{-1}a_1$ ) は  $v_0$  と同位相であり、この寄与は  $v_0$  に比べてわずかに大きいのみである<sup>\*6</sup>。このことは、初期の風速の回転成分は

<sup>\*6</sup>ロスビー波による  $v_0$  への寄与 ( $a_1v_1$ ) と  $v_0$  の比をとれば、

$$\frac{v_1a_1}{v_0} = (1 - U^2f^4k^{-4}\alpha^{-3})^{-1}$$

総観規模の運動に対して (2.7.68) が成り立つので、 $U^2f^4k^{-4}\alpha^{-3} \ll 1$  である。よって、

$$\frac{v_1a_1}{v_0} \simeq 1 + U^2f^4k^{-4}\alpha^{-3}$$

したがって初期値として地衝風を与えたならば、 $v_0$  はほぼロスビー波の寄与  $a_1v_1$  によって構成される。

地衡風に近いことを示唆している。初期条件 (2.7.66) を使うとき慣性重力波もまた存在する。この慣性重力波とロスビー波の振幅の比は、

$$\frac{a_{2,3}}{a_1} = \frac{U}{\sqrt{gH}} \frac{f^2}{k^2 gH}. \quad (2.7.69)$$

この値は、総観規模の擾乱に対する条件 (2.7.68) に対しては十分に小さい。一方で、慣性重力波に対してはこの値はずっと大きくなる。

適切な  $u_0$  の値が選ばれるならば、慣性重力波を完全に消去することができる。(2.7.65) において  $a_{2,3} = 0$  とし、 $v_0$  に対する地衡風の関係式を用いれば、次の  $u_0$  に対する関係式を得る。

$$u_0 = \frac{Ugh_0}{gH + f^2 k^{-2}} \quad (2.7.70)$$

ここで (2.7.68) より、分母の中で  $\alpha$  に比べて小さい項  $-U^2 f^4 k^{-4} \alpha^2$  を無視した。上の式によって振幅が与えられる初期速度場  $u = u_0 e^{ikx}$  は、準地衡風の発散 (2.6.60) を厳密に与える。

## 2.8 地衡風調節

前節では2つの重力波と1つのロスビー波を並置し、これらは全て同波長として取り扱った。重力波は、摩擦が存在しない限り、地衡風平衡をつり合いの位置とする永続的な周期振動を引き起こす<sup>\*7</sup>。しかし、無限領域の限られた領域において不釣り合いの状態が初期に発生するならば、重力波はついには不釣り合いの状態にある領域から伝搬し、調節期間の後に地衡風平衡の状態を残す。このプロセスは、不完全な初期条件に対するプリミティブ方程式のモデルの応答を決定する。実際にこの調節プロセスは、近似的に地衡風平衡にある大気を持続的に維持するように作用する。

<sup>\*7</sup>(2.6.44) の解を考える上で、 $x$  方向の速度は一定な地衡風  $U$  と非地衡風成分  $u'$  の和とし、 $y$  方向の速度は非地衡風成分  $v'$  のみで表すとした。そして  $u', v'$  の解の形式として、微小振幅をもつ単色平面波を仮定した。したがってこの解が存在できるとき、摂動場は地衡風平衡をつり合いの位置とする永続的な周期振動となる。ただし摩擦の効果に加わると、この摂動場の解は時間と共に減衰するような解となる。詳細は、「総観気象学入門」(東京大学出版, 小倉義光) の第 2.3 節等を参照していただきたい。

静止状態にある基本場に対する線形化された浅水方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H\frac{\partial u}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{2.8.71}$$

これらの方程式は、(2.6.44)において  $U = 0$  とおくことによって得られる。前に示したように、この系は3つの波動解をもつ。つまり、2つの慣性重力波 (2.6.49) とロスビー波 (2.6.52) である。特に今回の場合には  $H$  は定数であり  $\partial\bar{q}/\partial y = 0$  となるので、ロスビー波は定在波となる。

この問題は Rossby(1938) によって初めて取り扱われ、後にその時間発展は Cahn(1945) によって得られた。この節の展開には、Schoenstadt(1977) に習って空間のフーリエ変換を用いることにする。例えば、 $x$  方向の速度成分の関数  $u(x, t)$  の  $x$  に対するフーリエ変換を

$$\tilde{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-ikx} dx\tag{2.8.72}$$

と定義する。逆変換は、

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(k, t)e^{ikx} dk\tag{2.8.73}$$

と書くことができる。他の従属変数  $v, h$  に対する変換も同様に書くことにする。

方程式系をフーリエ変換するために、(2.8.71) の各式の両辺に  $e^{-ikx}$  を掛けて、 $x$  について  $-\infty$  から  $\infty$  まで積分することを考えよう。 $x$  微分の項については部分積分を実行するが、このとき無限遠で評価される項はゼロであるとする。フーリエ変換の結果、次の常微分方程式系を得る<sup>\*8</sup>

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}}{dt} &= f\tilde{v} - ikg\tilde{h} \\ \frac{d\tilde{v}}{dt} &= -f\tilde{u} \\ \frac{d\tilde{h}}{dt} &= -ikH\tilde{u}\end{aligned}\tag{2.8.74}$$

また、 $u$  の初期場のフーリエ変換は

$$\tilde{u}_0 = \bar{u}(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)e^{-ikx} dx\tag{2.8.75}$$

<sup>\*8</sup>これらの式は各波数ごとに成り立つため、この方程式系では  $k$  を定数として取り扱える。そのため、本来  $\partial\tilde{u}(k, t)/\partial t$  とするところを  $d\tilde{u}/dt$  と表記している。

によって与えられる. なお, 他の初期場のフーリエ変換  $\tilde{v}_0, \tilde{h}_0$  についても同様に定義される.

任意定数  $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{h}_0$  に対する初期値問題として方程式系 (2.8.74) の一般解<sup>\*9</sup>を求めれば,

$$\begin{aligned}\tilde{u}(k, t) &= \tilde{u}_0 \cos \nu t + \left( \frac{f\tilde{v}_0 - ikg\tilde{h}_0}{\nu} \right) \sin \nu t \\ \tilde{v}(k, t) &= \frac{k^2 g H \tilde{v}_0 + ikg f \tilde{h}_0}{\nu^2} - \frac{f\tilde{u}_0}{\nu} \sin \nu t + \left( \frac{f^2 \tilde{v}_0 - ikg f \tilde{h}_0}{\nu^2} \right) \cos \nu t \\ \tilde{h}(k, t) &= \frac{f^2 \tilde{h}_0 - ikH f \tilde{v}_0}{\nu^2} - \frac{ikH \tilde{u}_0}{\nu} \sin \nu t + \left( \frac{k^2 g H \tilde{h}_0 + ikH \tilde{v}_0}{\nu^2} \right) \cos \nu t\end{aligned}\quad (2.8.76)$$

を得る. ここで,

$$\nu = \sqrt{f^2 + k^2 g H} \quad (2.8.77)$$

である. ここで求めた解は, 以前に求めた浅水方程式の解と (スペクトル変換が必要ではあるが) 同様のものである. 今回の場合はそれらの解に  $U = 0$  を適用したものであり, 対応する位相速度は  $c_1 = 0$ ,  $c_{2,3} = \pm \nu/k$  となる.

波数空間に変換された場合は, 次のように定常的な部分  $( )_s$  と過渡的な部分  $( )_T$  の和として表現することができる.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_s(k) &= 0 \\ \tilde{v}_s(k) &= \frac{ikg}{f} \left( \frac{f^2 \tilde{h}_0 - ikfH\tilde{v}_0}{\nu^2} \right) \\ \tilde{h}_s(k) &= \left( \frac{f^2 \tilde{h}_0 - ikfH\tilde{v}_0}{\nu^2} \right)\end{aligned}\quad (2.8.78)$$

および

$$\begin{aligned}\tilde{u}_T(k, t) &= \tilde{u}_0 \cos \nu t + \frac{f}{\nu} (\tilde{v}_0 - if^{-1}kg\tilde{h}_0) \sin \nu t \\ \tilde{v}_T(k, t) &= -\frac{f}{\nu} \tilde{u}_0 + \frac{f^2}{\nu^2} (\tilde{v}_0 - if^{-1}kg\tilde{h}_0) \cos \nu t \\ \tilde{h}_T(k, t) &= -\frac{ikH}{\nu} \tilde{u}_0 \sin \nu t + \frac{ikHf}{\nu^2} (\tilde{v}_0 if^{-1}kg\tilde{h}_0)\end{aligned}\quad (2.8.79)$$

である. 定常解 (2.8.78) は,  $\tilde{v}_s = ikgf^{-1}h_s, \tilde{u}_s = 0$  となることから地衡風平衡の状態を表している. このことは, (2.8.74) において  $d/dt$  の項をゼロとすることによっても確認できる. 一方, 過渡的な解 (2.8.79) は, 地衡風からの初期のずれ  $((\tilde{v}_0 - ikgf^{-1}h_0)$  および  $\tilde{u}_0$ ) に直接的に比例する.

<sup>\*9</sup>導出については「付録:方程式系 (2.8.74) の解の導出」を参考.

定常的な解は後ほどより詳細に調べることにして、最初に過度的な解について議論する。後者の解は、時間と共に減衰することが示されるために重要である。波数空間で得られた過度的な解を、フーリエ逆変換を用いて実空間に戻せば

$$\begin{aligned} u_T(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0 \cos \nu t e^{ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\nu} \tilde{d}(k, 0) \sin \nu t e^{ikx} dk \\ v_T(x, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f \tilde{u}_0}{\nu} \sin \nu t e^{ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2}{\nu^2} \tilde{d}(k, 0) \cos \nu t e^{ikx} dk \\ h_T(x, t) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kH \tilde{u}_0}{\nu} \sin \nu t e^{ikx} dk + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kHf}{\nu^2} \tilde{d}(k, 0) \cos \nu t e^{ikx} dk \end{aligned} \quad (2.8.80)$$

ここで、

$$d(x, t) = v(x, t) - \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$$

であり、地衡風からのずれを表す。Schoenstadt(1977)では、方程式系(2.8.80)に停留位相法を用いることで解の振る舞いを解析した。 $x$ を固定し、 $|x| \gg L_R f t = \sqrt{gH} t$ であるとき、この方程式系の解は次のように近似される<sup>\*10</sup>。

$$\begin{aligned} u_T &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} [|\tilde{u}(x/\alpha, 0)| \cos(ft + \phi) + |\tilde{d}(x/\alpha, 0)| \sin(ft + \psi)] \\ v_T &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} [-|\tilde{u}(x/\alpha, 0)| \sin(ft + \phi) + |\tilde{d}(x/\alpha, 0)| \cos(ft + \psi)] \\ h_T &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \frac{(-Hx)}{f\alpha} [|\tilde{u}(x/\alpha, 0)| \sin(ft + \phi) - |\tilde{d}(x/\alpha, 0)| \cos(ft + \psi)] \end{aligned} \quad (2.8.81)$$

ここで、 $\psi$ と $\phi$ はゆっくり変化する位相角である。また、 $L_R = \sqrt{gH}/f$ はロスビーの変形半径であり、 $\alpha = L_R^2 f t$ とした。

限定的な解(2.8.81)から、過度的な速度場 $u_T, v_T$ は固定された $x$ に対して $t^{-1/2}$ に比例して減衰し、 $h_T$ は $t^{-3/2}$ に比例して減衰することが分かる。初期の不つり合いが、不つり合いにある初期領域からエネルギーを運び去る慣性重力波を励起するため、このような振る舞いが生じる。実際には、エネルギーは次の群速度 $G$ で伝搬する。

$$G = \frac{\partial \nu}{\partial k} = \frac{kgH}{\sqrt{f^2 + k^2 gH}} = \frac{gH}{f \sqrt{L^2 + L_R^2}} \quad (2.8.82)$$

ここで、 $2\pi L = 2\pi/k$ は波長を表す。この式から、ロスビーの変形半径 $L_R$ に比べて波長の短い波のエネルギーは、およそ浅水波の位相速度 $c = \sqrt{gH}$ で移動する一方で、より波長の長い波のエネルギーはよりゆっくりと移動する。過度的な波が不つり合いの状態にあった初期領域から遠方に伝搬した後、定常的な場のみが残される。また(2.8.81)から、固定された $x$ に対してこれらの過度的な場の解は時間と共に

<sup>\*10</sup>停留位相法を用いた(2.8.80)の近似解の導出は、付録を参照。

に減衰する（すなわち、過度的な波のエネルギーが固定位置  $x$  を通り過ぎて移動する）ために、数学的にもこのことが示される。

最終的な解は、 $L_R^2/L^2$  に強く依存する。このことは、(2.8.78) を次のように書き換えることで分かる。

$$\begin{aligned}\tilde{v}_s &= \frac{1}{1 + (L_R^2/L^2)} \left( \frac{L_R^2}{L^2} \tilde{v}_0 + ikf^{-1}g\tilde{h}_0 \right) \\ \tilde{h}_s &= \frac{1}{1 + (L_R^2/L^2)} \left( \frac{L_R^2}{L^2} \frac{f\tilde{v}_0}{ikg} + \tilde{h}_0 \right)\end{aligned}\tag{2.8.83}$$

コリオリ力と圧力勾配が、最初同じ大きさのオーダーを持つと仮定しよう。これは、 $\tilde{v}_0$  と  $ikf^{-1}g\tilde{h}_0$  が同程度の大きさであることを意味している。まず  $L^2 \ll L_R^2$  の場合を考えよう。このとき、(2.8.83) は

$$\tilde{v}_s = \tilde{v}_0, \quad \tilde{h}_s = \frac{f\tilde{v}_0}{ikg}\tag{2.8.84}$$

のように近似することができる。最終的な風の場合は初期に与えた風の場合と等しくなり、また最終的な自由表面高度は初期に与えた風の場合と地衡風的に関係付けられることに注意されたい。

一方、 $L^2 \gg L_R^2$  の場合に (2.8.83) は

$$\tilde{v}_s = ikf^{-1}g\tilde{h}_0, \quad \tilde{h}_s = \tilde{h}_0\tag{2.8.85}$$

と近似される。この場合には、最終的な場は初期に与えられた自由表面の高度によって全体的に決定される。この振る舞いについては次のように要約される。ロスビーの変形半径  $L_R$  よりも小さなスケールに対しては、最終的な場は初期の風の場合によって決定される。一方で、 $L_R$  よりも大きなスケールに対しては、最終的な場は初期の質量の場合によって決定される。この結果は今回の簡単な解析から予期される以上にずっと一般的なものであり、2次元の順圧大気にも適用される。連続的な成層大気においては、 $L_R = c_g/f$  ( $c_g$  は内部重力波の位相速度) とすることでこの結果は適用される。この結果は、Okland(1970) によってなされたように鉛直構造を固有関数に分割することによって発見することができる。

中緯度の順圧大気に対しては、 $H \sim 10$  km,  $L_R = 3000$  km,  $2\pi L_R = 18000$  km と見積もれることができる。この場合に、波長 5000 km 前後の総観規模の波は明らかに  $2\pi L_R$  に対して「短波」である。しかしながら、成層大気では内部重力波の位相速度は  $c_g \sim 100\text{ms}^{-1}$  ほどとなるため、 $L_R \sim 1000$  km となる。このとき  $2\pi L_R \sim 6000$  km となり、このスケールは総観規模の波のスケールに対応する。よって、初期の質量場と風の場合の両方が総観規模の波の初期化において重要となる。 $f$  が小さ

い熱帯においては、ほとんどの波はロスビーの変形半径に対して「短波」である。この場合、波の場の初期化は主に初期の風場によって決定されることを意味する。

初期の地衡風からのずれを使って最終的な自由表面の高度場を書くと便利である。すなわち、

$$\tilde{h}_s(x) = \tilde{h}(x, 0) - \tilde{h}_T(x, 0)$$

上の式をフーリエ逆変換して実空間に戻し、 $\tilde{h}_T(x, 0)$  には (2.8.79) を用いれば、

$$h_s(x) = h(x, 0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H f i k}{\nu^2} \tilde{d}_0 e^{i k x} dk \quad (2.8.86)$$

を得る。ここで、 $d_0$  は初期の地衡風からのずれである。また、フーリエ変換の畳込み定理を用いると便利である。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k) \tilde{G}(k) e^{i k x} dk = \int_{-\infty}^{\infty} F(x') G(x - x') dx' \quad (2.8.87)$$

ただし、 $\tilde{F}, \tilde{G}$  は  $F, G$  のフーリエ変換である。また、 $e^{-|x|/L_R}$  のフーリエ変換を求めると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/L_R} e^{-i k x} dx = \frac{2L_R}{1 + k^2 L_R^2} = \frac{2L_R f^2}{\nu^2}$$

を得る。ここで、 $G(x) = e^{-|x|/L_R}$ 、 $F(x) = \partial d(x, 0)/\partial x$  として<sup>\*11</sup>、畳込み定理 (2.8.87) を適用すれば、(2.8.86) は

$$h_s(x) = h(x, 0) - \frac{H}{2L_R f} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x'|/L_R} \frac{\partial \tilde{d}(x', 0)}{\partial x'} dx' \quad (2.8.88)$$

となる。最後に部分積分を実行すれば、定常的な自由表面の高度の解  $h_s(x)$  は次のように書ける。

$$h_s(x) = h(x, 0) + \frac{H}{2L_R^2 f} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - x'}{|x - x'|} e^{-|x-x'|/L_R} \tilde{d}(x', 0) dx' \quad (2.8.89)$$

この結果は、特定の位置  $x$  における初期の地衡風からのずれの影響が距離  $L_R$  ほどで消滅してしまうことを示している。定常的な風速場は、(2.8.89) から地衡風の的に得られる。すなわち、

$$v_s(x) = f g^{-1} \partial h_s / \partial x, \quad u_s = 0 \quad (2.8.90)$$

この章では2節を使って、非地衡風的な初期条件に対して応答パターンが異なる事例を説明した。線形波動の説明においては、初期の摂動場は単色平面波解の形式で表現した。得られた解は、地衡風平衡の状態のまわりを永続的に振動する。この

<sup>\*11</sup>このとき  $\tilde{G}(k) = 2L_R f^2 / \nu^2$ 、 $\tilde{F}(k) = i k \tilde{d}(k)$  となる。

節において、初期のつり合いは無限小領域に局在化されており、重力波がつり合いにある領域から伝搬するにつれて、解は定常状態に近づいていく。2次元領域においては、重力波は同じ時間周期の間にはるかに広い領域にエネルギーを散布するので、この地衡風調節のプロセスはずっと早く働く。一般的には、初期のつり合いが領域の空間スケールに対して小さなスケールを持つならば、調節プロセスは非常に効率的に働く。一方、これらのスケールが同程度の場合には、場はしばらくの間振動するだろう。調節プロセスの後に達成される最終的な状態は、 $L^2/L_R^2$  に決定的に依存する。ここで、 $L_R = c_g/f$  であり、 $c_g$  はその系における適切な重力波の位相速度である。初期場のスケール  $L$  が  $L_R$  に比べて小さいとき、最終的な状態は初期の風の場の回転部分によって決定される。一方で  $L$  が  $L_R$  に比べて大きいとき、最終的な状態は初期の質量場によって決定される。プリミティブ方程式の初期化の手法を開発する上で、この調節プロセスを考慮することがとても重要である。

## 付録:方程式系 (2.8.74) の一般解の導出

3つの従属変数をベクトル  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$  を用いて表現すれば, 方程式系 (2.8.74) は行列  $G$  を使って

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = G\mathbf{s} \quad (2.8.91)$$

と書き直すことができる. ここで,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & f & -ikg \\ -f & 0 & 0 \\ -ikH & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8.92)$$

である.

行列  $G$  を相似変換により対角化することを考える. 行列  $G$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  とし, それに対応する固有ベクトルを  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  とする. これらの固有ベクトルが一次独立であるとき, 行列  $G$  は行列  $P = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3]$  を使って次のように対角化可能である<sup>\*12</sup>.

$$P^{-1}GP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.8.93)$$

実際に行列  $G$  の固有値を求めれば互いに異なることが分かるため, 行列  $G$  の3つの固有ベクトルは一次独立である. したがって, 行列  $G$  は相似変換を用いて対角化可能である. 行列  $G$  の固有ベクトルを求めれば, 行列  $P$  は

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & if/\nu & -if/\nu \\ -if/(kg) & -kH/\nu & kH/\nu \end{bmatrix} \quad (2.8.94)$$

と定められる. また, 行列  $G$  の対角化の結果は

$$P^{-1}GP = \text{diag}(0, i\nu, -i\nu) \quad (2.8.95)$$

となる.

次に, 上で定義した正則行列  $P$  を用いて

$$\mathbf{s} = P\mathbf{s}^*$$

なる一次変換を考える. (2.8.91) において左から  $P^{-1}$  を作用させて, さらに上の定義を代入すれば

$$\frac{d\mathbf{s}^*}{dt} = P^{-1}GP\mathbf{s}^* \quad (2.8.96)$$

<sup>\*12</sup>行列  $P$  は一次独立な固有ベクトルを使って生成されるので, 正則行列である.

を得る. (2.8.95) を代入すれば,

$$\frac{ds^*}{dt} = \text{diag}(0, i\nu, -i\nu) s^* \quad (2.8.97)$$

となる. この  $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*)$  に対する常微分方程式の解を求めれば,

$$s_1^* = C_1, \quad s_2^* = C_2 e^{i\nu t}, \quad s_3^* = C_3 e^{-i\nu t} \quad (2.8.98)$$

ここで,  $C_1, C_2, C_3$  は任意の複素定数である. 求めた  $s^*$  を  $P$  で一次変換することにより, 次のような (2.8.91) の一般解が得られる.

$$s = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -if/(kg) \end{bmatrix} + C_2 e^{i\nu t} \begin{bmatrix} 1 \\ if/\nu \\ -kH/\nu \end{bmatrix} + C_3 e^{-i\nu t} \begin{bmatrix} 1 \\ -if/\nu \\ kH/\nu \end{bmatrix} \quad (2.8.99)$$

最終的な解の形式 (2.8.76) を得るためには, (2.8.99) における任意の複素定数  $C_1, C_2, C_3$  を任意の  $s$  の初期値  $(u_0, v_0, h_0)$  で表す必要がある. これについては,  $t = 0$  における (2.8.99) を  $C_1, C_2, C_3$  について解けばよい. また, 指数関数の部分をオイラーの関係式を用いて三角関数に展開する必要がある.

## 付録: 停留位相法を用いた (2.8.80) の近似解の導出

### 停留位相法の概要

停留位相法<sup>\*13</sup>とは, 次の形式の積分を評価するための手法である.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i\theta(t,k)} dk \quad (2.8.100)$$

ここで,  $\theta(k, t)$  を積分範囲の大部分で  $k$  と伴に急速に変化する関数とし,  $g(k)$  をそれに比べ  $k$  についてゆっくりと変化する関数だとする. 指数関数の部分  $e^{i\theta}$  が  $k$  について急速に振動する大部分の積分範囲では,  $g(k)$  が  $k$  についてゆっくり変化する関数であるために, 近傍の積分寄与は互いに打ち消される. その結果, そのような積分範囲における  $f(t)$  への積分の寄与はゼロであると近似できるだろう. 寄与がゼロと近似できない重要な積分範囲は,  $\partial\theta/\partial k = 0$  を満たす停留位相点の近傍領域

<sup>\*13</sup>ここで行った停留位相法の説明は, 山下達也様の物理数学の自主ゼミノート「近似」(<http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/yamasita/phys-math-approx.pdf>) を参考にさせて頂いた.

である。この停留位相点を  $k = k_s$  とし、微小な正の実数を  $\varepsilon$  とすれば、 $f(t)$  は次のように近似できる。

$$f(t) \simeq \int_{k_s - \varepsilon}^{k_s + \varepsilon} g(k) e^{i\theta(t,k)} dk \quad (2.8.101)$$

$\theta(t, k)$  を点  $k = k_s$  まわりでテイラー展開し、2 次の項まで書き下せば

$$\theta(k) \simeq \theta(k_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial k^2} \Big|_{k=k_s} (k - k_s)^2$$

これを (2.8.101) に代入する。さらに考えている積分範囲は微小領域であるので、ゆっくり変化する関数である  $g(k)$  を  $g(k_s)$  で近似して、 $k$  に依存しない部分を積分の外に出せば、

$$f(t) \simeq g(k_s) e^{i\theta(t,k_s)} \int_{k_s - \varepsilon}^{k_s + \varepsilon} \exp \left[ \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial k^2} \Big|_{k=k_s} (k - k_s)^2 \right] dk \quad (2.8.102)$$

を得る。ここで、 $k = k_s$  において  $\partial\theta/\partial k = 0$  となることを用いた。

次に  $g(k) = A(k)/2\pi$ ,  $\theta(k, t) = kx + \nu t$  とおき、 $x$  を固定したときに  $t \rightarrow \infty$  において  $f(t)$  が停留位相法を使ってどのように近似されるかを考えよう。すなわち、上で導いた公式 (2.8.102) を使って、 $t \rightarrow \infty$  における

$$f(t) \simeq \frac{1}{2\pi} A(k_s) e^{i(k_s x + \nu(k_s) t)} \int_{k_s - \varepsilon}^{k_s + \varepsilon} \exp \left[ i \frac{t}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial k^2} \Big|_{k=k_s} (k - k_s)^2 \right] dk \quad (2.8.103)$$

を計算することになる。ただし、位相関数  $\theta$  中の振動数  $\nu$  は

$$\nu = f \sqrt{1 + L_R^2 k^2}$$

を満たすとする。ここで、 $L_R = (gH)^{1/2}/f$  はロスビーの変形半径である。

最初に  $\nu$  の  $k$  による 1 階微分と 2 階微分を計算すれば、

$$\frac{\partial \nu}{\partial k} = f \frac{f L_R^2 k}{(1 + L_R^2 k^2)^{1/2}}, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial k^2} = \frac{f L_R^2}{(1 + L_R^2 k^2)^{3/2}}$$

前者より、 $0 = \partial\theta/\partial k = x + (\partial\nu/\partial k)t$  を満たす  $k$  を求めることができる。今  $t$  が十分に大きいことに注意すれば、

$$k_s = -\frac{x/L_R}{(L_R^2 f^2 t^2 - x^2)^{1/2}} \quad (2.8.104)$$

を得る。よって、後者の  $k = k_s$  における式は

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial k^2} \Big|_{k=k_s} = \frac{[f^2 L_R^2 t^2 - x^2]^{3/2}}{f^2 L_R t^3} > 0$$

となる. これを (2.8.103) に代入する際に,

$$p = (k - k_s) \left\{ \frac{t}{2} \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial k^2}(k_s) \right| \right\}^{1/2}$$

なる変数変換を行なうことにする. この変数変換において  $p$  の積分範囲は,  $t \rightarrow \infty$  であるとき  $-\infty$  から  $\infty$  となる. その結果 (2.8.103) は,

$$f(t) \simeq \sqrt{2} \frac{A(k_s) e^{i(k_s x + \nu(k_s) t)}}{(t \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial k^2} \right|)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ ip^2 \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial k^2}(k_s) \right) \right] dp \quad (2.8.105)$$

となる. ここで,  $\operatorname{sgn}(A)$  は  $A$  の符号が正のとき 1, 負の時 -1 を返す. 右辺を計算するために Fresnel 積分を用いれば\*14,

$$f(t) \simeq \sqrt{2\pi} \frac{A(k_s) e^{i(k_s x + \nu(k_s) t)}}{(t \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial k^2} \right|)^{1/2}} \exp \left[ i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial k^2}(k_s) \right) \right] \quad (2.8.106)$$

を得る. さらに先ほど求めた  $k_s$  を使って  $\theta(k_s)$  を計算し, また  $k = k_s$  における  $\partial^2 \nu / \partial k^2$  を用いれば, 上の式は最終的に次の形になる.

$$f(t) \simeq \sqrt{2\pi} \left( \frac{L_R^2 f^2 t^2}{[L_R^2 f^2 t^2 - x^2]^{3/2}} \right)^{1/2} A(k_s) \exp i \left[ \frac{(L_R^2 f^2 t^2 - x^2)^{1/2}}{L_R} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (2.8.107)$$

$\partial^2 \nu / \partial k^2$  の符号が負の時には,  $\pi/4$  は  $-\pi/4$  となることに注意されたい.

### 停留位相法を用いた (2.8.80) の近似解

$|x| \ll L_R f t (= \sqrt{gH} t)$  を満たす固定位置  $x$  において,  $t \rightarrow \infty$  での (2.8.80) の解の振る舞いを停留位相法を用いて近似的に決定しよう. 次の形式の積分

$$I(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos \nu t e^{ikx} dk,$$

$$J(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \sin \nu t e^{ikx} dk$$

の近似を考えよう. ここで,  $A(k)$  は実関数で表される初期場のフーリエ変換を表している. オイラーの関係式を用れば, 上の第 1 式目は次のように変形される.

$$I(x, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i\theta_1(k)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i\theta_2(k)} dk \right\} \quad (2.8.108)$$

\*14 Fresnel 積分については公式だけを示すことにする.

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

この積分の近似を求めることにしよう. ここで,  $\theta_{1,2}(k) = kx \pm \nu t$  とおいた. また, 前と同様に振動数は  $\nu = f(1 + L_R k^2)^{1/2}$  としている.

(2.8.107) を適用するときには, 位相関数として  $\theta_1$  をそのまま選べばよい. 位相関数として  $\theta_2$  を選ぶ際には間の符号が逆になっているので注意が必要である. しかしながら,  $\partial\theta_2/\partial k = 0$  を満たす  $k(= k_{2s})$  を求めれば,  $k_{1s} = -k_{2s}$  となることが分かり, また  $\nu$  は波数の符号では変わらないので次の関係が得られる.

$$\theta_1(k_{1s}) = -\theta_2(k_{2s}), \quad \frac{\partial^2\nu}{\partial k^2}(k_{1s}) = \frac{\partial^2\nu}{\partial k^2}(k_{2s}) > 0$$

今  $|x| \ll L_R f t$  であること考慮すれば, (2.8.104) などは

$$k_{1s} = -k_{2s} \simeq -x/\alpha, \quad \nu(k_{1s}) = \nu(k_{2s}) \simeq f \quad (2.8.109)$$

と近似される. ここで,  $\alpha = L_R^2 f t$  とおいた.

また, (2.8.107) は,  $\theta_1 = kx + \nu t$  に対して

$$f(t) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} A(k_{1s}) \exp i \left[ ft + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial^2\nu}{\partial k^2}(k_s) \right) \right] \quad (2.8.110)$$

$\theta_2 = kx - \nu t$  に対して,

$$f(t) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} A(k_{2s}) \exp i \left[ -ft - \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial^2\nu}{\partial k^2}(k_s) \right) \right] \quad (2.8.111)$$

と近似される. 上で得た式を用いることで,  $I(x, t)$  は

$$I(x, t) \simeq \frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ A(k_{1s}) e^{i[ft+(\pi/4)]} + A(k_{2s}) e^{-i[ft+(\pi/4)]} \right\} \quad (2.8.112)$$

と近似することができる.

ところで, 今  $A(k)$  が実関数のフーリエ変換であるので, 定義より  $A(-k) = A^*(k)$  の関係を満たしている. ここで, 添字の  $*$  は複素共役を表す. よって, (2.8.112) は,

$$I(x, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \operatorname{Re}[A(k_{2s})] \cos\left(ft + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{Im}[A(k_{2s})] \sin\left(ft + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (2.8.113)$$

となる<sup>\*15</sup>. 同様にすれば,

$$J(x, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \operatorname{Re}[A(k_{2s})] \sin\left(ft + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{Im}[A(k_{2s})] \cos\left(ft + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (2.8.114)$$

<sup>\*15</sup>  $k_{1s} = -k_{2s}$  より,

$$A(k_{1s}) = A(-k_{2s}) = A^*(k_{2s})$$

また,

$$A^* e^{i\theta} + A e^{-i\theta} = 2(\operatorname{Re}[A] \cos \theta + \operatorname{Im}[A] \sin \theta)$$

であることを用いる.

もまた導かれる。

最後に括弧内の三角関数の項の位相は同じなので、三角関数の合成を行えば

$$I(x, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} |A(k_{2s})| \cos(ft + \phi_k), \quad J(x, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} |A(k_{2s})| \sin(ft + \phi_k) \quad (2.8.115)$$

を得る。ここで、

$$\{[\operatorname{Re}A(k)]^2 + [\operatorname{Im}A(k)]^2\}^{1/2} = |A(k)|$$

である。また、初期位相を

$$\phi_k = \frac{\pi}{4} - \arg(A(k))$$

とおいた。

よって、ここで求めた (2.8.109) や (2.8.115) を用いることで、(2.8.80) は (2.8.81) のように近似されることが示される<sup>\*16</sup>。

---

<sup>\*16</sup>3 式目を近似する際には少し注意が必要である。 $\tilde{u}$  は実関数のフーリエ変換であるので、(2.8.80) の 3 式目中の  $ik \tilde{u}_0(k)$  ( $B(k)$  とおく) に関して

$$B(-k) = -ik \tilde{u}_0(-k) = -ik \tilde{u}_0^*(k) = B^*(k)$$

となり、 $ik \tilde{u}_0(k)$  は実関数のフーリエ変換といえる。したがって、(2.8.115) を適用する際における実関数  $A(k)$  として、 $ik \tilde{u}_0(k)$  を選べばよい。このとき近似の結果の式に現れる  $|A(k_s)|$  は、

$$|A(k_s)| = |ik_s \tilde{u}_0| = k_s |\tilde{u}_0(k_s)|$$

となる。