

第3章 スケール解析

3.1 イントロダクション

この章で行われるスケール解析は、大気の運動を支配する静力学方程式に含まれる様々な項の大きさを比較する際に、組織的な方法を与える。エネルギーについての考慮とともにこのスケール解析の理論を用いることで、力学の解析や数値予報のための一貫性のある力学的・数学的なモデルの設計を行なうことができる。J. Charney は、1948年にこの手法を大規模な気象力学の研究に導入した。その後、特に Burger(1958) や Phillips(1963) によって、この手法はさらに発展した。

物理変数は、次のように空間・時間に対して特徴的なスケールを持っていると仮定する。

- L : 特徴的な水平スケール (およそ擾乱の波長の $1/4$)
- T : 特徴的な時間スケール (およそ局所的な周期の $1/4$)
- V : 特徴的な水平速度

このとき、微分の近似的な大きさは次のように近似される。

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{V}{L}, \text{ etc, } \frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{V}{T}$$

この後のスケール解析において、それぞれの方程式中の全ての項は、他の項と同じ次元を持った有次元な部分と無次元な係数部分の積として書かれるだろう。前者の相対的な大きさは、無視しても良い項を決定する。スケール解析は、解析の始まる際には特定できないいくつかの量 (例えば鉛直速度) のスケールもまた与える。この章では最初に浅水方程式を分析した後に、図 2.1.1 で示されるようないくつかの現象に対してこの手法を適用する。

3.2 浅水方程式におけるスケール解析

自由表面をもつ非圧縮流体の静力学的な運動を表現する浅水方程式を使って、スケール解析の技術を説明すると簡便である。前章で見てきたように、浅水方程式はより完全な傾圧方程式と同様に慣性重力波とロスビー波の両方を解としてもつ。一般的な浅水方程式は、対流圏内の平均的な運動をおおまかに表現する。

運動方程式 (2.6.38a), (2.6.38b) をベクトル形式で書けば,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \Phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0 \quad (3.2.1)$$

となる。ここで、 $\Phi = gh$ であり、コリオリパラメータ f は一定であると仮定する。地球のより適切な幾何的な取り扱いについては、後ほど述べることにする。連続の式 (2.6.40) は,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.2.2)$$

時間スケールは次のように与えられる。

$$T = L/C \quad (3.2.3)$$

ここで、 C は注目している波動運動の平均的な位相速度である。総観スケールの特徴から $C \sim V$ であるので,

$$T = L/V \quad (3.2.4)$$

となる。この時間スケールは、移流時間スケールと呼ばれる。もし $L \sim 10^6$ m, $V \sim 10$ m/s と見積もるならば、移流時間スケールは $T \sim 10^5$ s (約 1 日) となる。これは、総観規模の擾乱の 1/4 周期とおおよそ一致する。

圧力勾配力の項以外の運動方程式 (3.2.1) の項をスケールリングすれば次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \Phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0 \quad (3.2.5)$$

$$R_o f V \quad R_o f V \quad f V$$

ここで、 $R_o = V/fL$ はロスビー数である。ロスビー数はコリオリ力に対する相対加速度の比となっていることに注意されたい。典型的な総観規模に対して特徴的なスケールは、 $f \sim 10^4 \text{ s}^{-1}$, $L \sim 10^6$ m, $V \sim 10$ m/s であり、このときロスビー数は $R_o \sim 0.1$ となる。実際、ロスビー数は大気や海洋の広範囲の運動に対して小さな値をもつ。

R_o が小さいとき, (3.2.5) は加速度がコリオリ力に比べて小さいことを示す. 結果的に, コリオリ力は圧力勾配力によってのみバランスされ得る. よって,

$$\nabla\Phi \sim fV \quad (3.2.6)$$

連続の式 (3.2.2) を解析するために, Φ の場を次のように分割する.

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' \quad (3.2.7)$$

ここで, $\bar{\Phi} = gH$ は定数である. Φ' のスケールは, 上の式を (3.2.6) に代入することによって得られる.

$$\Phi' \sim fVL \quad (3.2.8)$$

これは, 「地衡風の」なスケーリングとして知られている.

(3.2.7) の関係を (3.2.2) に導入し, (3.2.4) と (3.2.8) を使って各項のスケール解析を行えば,

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\Phi' + \Phi' \nabla \cdot \mathbf{V} + \bar{\Phi} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.2.9)$$

$$R_o F \bar{\Phi} \frac{V}{L} \quad R_o F \bar{\Phi} \frac{V}{L} \quad R_o F \bar{\Phi} \frac{V}{L} \quad \bar{\Phi} V/L$$

を得る. ここで, $F = f^2 L^2 / \bar{\Phi}$ は回転フルード数(rotational Froude number)である. このパラメータは次のようにも書くことができる.

$$F = f^2 L^2 / \bar{\Phi} = L^2 / L_R^2 \quad (3.2.10)$$

ここで, $L_R = \bar{\Phi}^{1/2} / f$ はロスビーの変形半径(Rossby radius of deformation)である. 第 2.7 節で示したように, L_R は地衡風調節のプロセスにおいてとても重要である.

最大の項に対してオーダー R_o の項を無視すれば, 運動方程式 (3.2.5) は

$$\nabla\Phi + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{V} = f^{-1}\mathbf{k} \times \nabla\Phi \quad (3.2.11)$$

となる. よって風は地衡風として予報されるが, その風はオーダー R_o の項を無視したことにより誤差を含む. もし $F \leq 1$ であるならば, 連続の式 (3.2.9) の第一次近似は

$$\bar{\Phi} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.2.12)$$

となる. f が一定であるとき地衡風の発散はゼロとなるため, (3.2.12) は (3.2.11) と一貫性があることに注意されたい. (3.2.11) と (3.2.12) の関係は純粹に診断的で

あり、時間微分を含まない。このことは、大規模な大気の流れが近似的に地衡風であることを示す観測と一致する。結果的に、もし完全な浅水方程式系 (3.2.11), (3.2.12) が予報に用いられるならば、初期の風の場合や自由表面の高度場の小さな誤差が時間の経過とともに大きな誤差を生み出すことになる (第 2.7 節を参照)。事実、Richardson(1922) は観測データに対して (3.2.9) と同様な地表面気圧の時間発展方程式を適用し、実際の圧力変化はわずかだったにもかかわらず、とてつもなく大きな圧力変化を予測してしまったのである。この問題は、(3.2.1) と (3.2.2) が位相速度の遅いロスビー波タイプの運動と共に位相速度の速い慣性重力波を表現するために発生する (第 2.5 節を参照)。

風が近似的には地衡風となるという事実を用いる予報方程式系を導くことが望まれる。第 2.5 節において、線形ロスビー波に対して発散は渦度に比べて小さいということを示した。このことは、 $R_o \ll 1$ に対する浅水方程式の第 1 次近似 (3.2.11), (3.2.12) によってもまた示唆される。結果的に、風を回転と発散部分に次のように分割すると良いだろう^{*1}。

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi, \quad \mathbf{V}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla\psi, \quad \mathbf{V}_\chi = \nabla\chi \quad (3.2.13)$$

ここで、 ψ は風の回転部分に対する流線関数であり、 χ は風の発散部分に対する速度ポテンシャルである。このとき、渦度と発散は

$$\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \nabla^2\psi \quad D = \nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2\chi \quad (3.2.14)$$

となる。これらの方程式は、境界条件が指定されるならば ψ と χ について解くことができる。渦度方程式は、(3.2.1) に $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$ を作用させることによって得られる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta + (f + \zeta) \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.2.15)$$

一方、発散方程式は (3.2.1) に $\nabla \cdot$ を作用させることによって得られる。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) + \nabla^2 \Phi - f\zeta = 0 \quad (3.2.16)$$

速度成分を次のようにスケールリングする。

$$\mathbf{V}_\psi \sim V, \quad \mathbf{V}_\chi \sim R_1 V \quad (3.2.17)$$

^{*1}ヘルムホルツの分解定理によれば、3次元空間で定義されたベクトル場 \mathbf{F} が、無限遠で十分強く 0 に収束するならば、 \mathbf{F} は非回転なベクトル場と非発散なベクトル場に分解できる。すなわち、

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}$$

ここで、 ϕ はスカラーポテンシャル、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルである。これらは、付加定数を除いて一意に決定される。

ここで, R_1 は決定されなければならない小さな無次元数である. (3.2.13) を (3.2.9) に代入し, (3.2.17) を適用すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \nabla \cdot \Phi' + \mathbf{V}_\chi \nabla \cdot \Phi' + \Phi' \nabla \cdot \mathbf{V}_\chi + \bar{\Phi} \nabla \cdot \mathbf{V}_\chi = 0 \\ R_o F \bar{\Phi} \frac{V}{L} \quad R_o F \bar{\Phi} \frac{V}{L} \quad R_1 R_o F \bar{\Phi} \frac{V}{L} \quad R_1 R_o F \bar{\Phi} \frac{V}{L} \quad R_1 \bar{\Phi} \frac{V}{L} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

となる. 最後の項が他の項とバランスする^{*2} ためには,

$$R_1 \leq R_o F \quad (3.2.19)$$

である必要がある. 次に, (3.2.13) を使って渦度方程式 (3.2.15) を書き直し, スケール解析を行なうことで,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \zeta + \mathbf{V}_\chi \nabla \zeta + fD + \zeta D = 0 \quad (3.2.20)$$

$$\frac{V^2}{L^2} \quad \frac{V^2}{L^2} \quad R_1 \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{R_o L^2} \quad R_1 \frac{V^2}{L^2}$$

を得る. ここで, $\zeta \sim V/L$, $D \sim R_1 V/L$ とした. 同様に発散方程式 (3.2.16) をスケール解析すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \mathbf{V}_\psi) + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \mathbf{V}_\chi) + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \mathbf{V}_\psi) \\ R_1 \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{V^2}{L^2} \quad R_1 \frac{V^2}{L^2} \quad R_1 \frac{V^2}{L^2} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$\begin{aligned} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \mathbf{V}_\chi) + \nabla^2 \Phi' - f\zeta = 0 \\ R_1^2 \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{1}{R_o} \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{1}{R_o} \frac{V^2}{L^2} \end{aligned}$$

となる. 渦度方程式 (3.2.20) から発散項がバランスされるためには,

$$R_1 \leq R_o \quad (3.2.22)$$

となる必要がある. 今渦度に対する発散の比は,

$$\frac{|D|}{|\zeta|} = R_1 \quad (3.2.23)$$

と書けるだろう. ここで, R_1 は (3.2.19) と (3.2.22) を満たさなければならない. このことは, $L = k^{-1}$, $\bar{\Phi} = gH$ ならば, ロスビー波に対する線形的な結果 (2.6.61) と一致する. 系の自転の結果として, 発散は渦度に比べて小さい.

^{*2} 「最後の項が最低次オーダーとならない」という意味である.

$F \sim 1$, $R_o \ll 1$ を満たす運動を考えよう. この場合には, (3.2.19) と (3.2.22) は $R_1 = R_o$ とすることによって満たされる. (3.2.9), (3.2.20), (3.2.21) のそれぞれの方程式において, 最大の項と比べてオーダー R_o の項およびそれよりも小さなオーダーの項を全て落とせば, 次の簡潔な方程式系を得る.

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \Phi' + \bar{\Phi} D = 0 \quad (3.2.24)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \zeta + f D = 0 \quad (3.2.25)$$

$$\nabla^2 \Phi' - f \zeta = 0 \quad (3.2.26)$$

(3.2.26) によれば渦度は地衡風のであり, $\zeta = \nabla^2 \psi$ が導入されるならば, 流線関数に対する解は $\psi = \Phi' / f$ となる. このとき, 風の回転部分は

$$\mathbf{V}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla \psi = f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \Phi' \quad (3.2.27)$$

となる. これは地衡風 (3.2.11) である. 方程式 (3.2.24), (3.2.25), (3.2.26) (または (3.2.27)) は, 準地衡風方程式(quasi-geostrophic equation) と呼ばれる. これらの方程式において渦度と移流項の風速は地衡風によって表現されるが, 発散はそうでない (このモデルにおいて地衡風の発散はゼロである) ことに注意されたい. (3.2.23) から発散は渦度に比べて小さいが, (3.2.24) と (3.2.25) の発散項は方程式中の他の項の大きさと同程度のオーダーとなる.

(3.2.24) と (3.2.25) を使って発散 D を消去すれば,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \right) \left(\zeta - \frac{f}{\bar{\Phi}} \Phi' \right) = 0 \quad (3.2.28)$$

を得る. これは, 準地衡風ポテンシャル渦度方程式(quasi-geostrophic potential vorticity equation) である. 上の方程式がポテンシャル渦度方程式 (2.6.42) のこのモデルに対するよい近似となっていることは, (2.6.42) を線形化し, 全微分中の移流項の風速を地衡風で近似することによって示される^{*3}. (3.2.26) と (3.2.27) を利用すれば, (3.2.28) は Φ' のみを使って表現することができる.

^{*3}このモデルにおいて, 浅水系のポテンシャル渦度は次のように近似される.

$$\begin{aligned} q &= \frac{f + \zeta}{h + H} = g \bar{\Phi}^{-1} \frac{f + \zeta}{1 + (\Phi' / \bar{\Phi})} \simeq g \bar{\Phi}^{-1} f \left[1 + (\zeta / f) (1 - (\Phi' / \bar{\Phi})) \right] \\ &\simeq g \bar{\Phi}^{-1} f \left[1 + (\zeta / f) - (\Phi' / \bar{\Phi}) \right] \end{aligned}$$

ここで, $h/H \ll 1$ とした. また, 今 $R_1 (= R_o)$ は 1 より十分小さいので $\zeta/f \ll 1$ として取り扱った.

さらに, 速度の回転部分 \mathbf{V}_ψ に対する発散部分 \mathbf{V}_χ の比もまた $R_1 (= R_o)$ であるので, 全微分中の移流項に含まれる速度を \mathbf{V}_ψ で近似すれば (3.2.28) が導かれる.

発散に対する診断方程式は, (3.2.24) と (3.2.25) の局所時間微分の項を (3.2.26) を使って消去することによって得られる.

$$\left(\nabla^2 - \frac{f^2}{\bar{\Phi}}\right) D = \frac{1}{f\bar{\Phi}} \mathbf{k} \times \nabla\Phi' \cdot \nabla(\nabla^2\Phi') \quad (3.2.29)$$

これは, 準地衡風発散方程式と呼ばれる. この方程式を前章のように線形化すれば, (2.6.59) の x 微分まで簡単化される. (3.2.29) において, 発散は Φ' の場または (3.2.26) を介して渦度と直接的に関連付けられるということが重要である. このことは系の強い自転による結果であり, 流体力学の系では一般的ではない.

実際のところ, 低気圧のスケールの運動 ($L \sim 10^6$ m, $f \sim 10^{-4}$ s $^{-1}$, $\bar{\Phi}^{1/2} = 300$ m/s) に対する F のもっともらしい値は, $F \sim 0.1$ である. $F \sim 1$ とした前述の解析は, 次の節で使われる傾圧スケーリングとの比較のために行われた. $F \sim R_o \ll 1$ ならば, このとき (3.2.19) によって $R_1 = R_o^2$ となる. この条件に対して渦度方程式 (3.2.20) は,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla\zeta = 0 \quad (3.2.30)$$

となる. これは非発散順圧渦度方程式である. この場合には連続の式は必要とされず, 発散方程式は再び地衡風の関係 (3.2.27) を与える.

この節で導かれた予報方程式 (3.2.28), (3.2.30) は, 全ての項が同じオーダーであるため, 初期条件に含まれる小さな誤差に対して敏感でないということに注意されたい. もとの方程式系 (3.2.1), (3.2.2) に対しては, このようなことは当てはまらない.

3.3 傾圧方程式におけるスケール解析

この節では、球状の地球に対する傾圧方程式にスケール解析を適用する。鉛直座標には次のような対数圧力座標を用いると便利である。

$$Z = -\ln(p/p_0) \quad (3.3.31)$$

ここで、 p_0 は標準海面気圧である。鉛直座標 Z は、状態方程式と静水圧平衡の式によって実際の高度 z 、そして状態方程式と静水圧平衡の式によってジオポテンシャル $\Phi = gz$ と関連付けられる。

$$RT = p\alpha = -p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \quad (3.3.32)$$

対数圧力座標系 Z の利点は、スケールハイト $H = RT^*/g$ (約 8 km) を Z に掛けることで実際の高度を近似的に得られることである。ここで、 T^* は大気平均温度である。この座標系は第 1 章の圧力座標系と密接に関係し、鉛直微分は次のように関係付けられる。

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial Z}{\partial p} \frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3.3.33)$$

一方で、他の偏微分については両方の座標系において同じである (第 1.8 節を参照)。対数圧力座標系の鉛直速度 \dot{Z} は、圧力座標系の鉛直速度 ω と次のように関係付けられる。

$$\dot{Z} = -\dot{p}/p = -\omega/p \quad (3.3.34)$$

Z 系における運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \dot{Z} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial Z} + \nabla \Phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0 \quad (3.3.35)$$

となる。また、熱力学第 1 法則は (3.3.32) を使って、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \dot{Z} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \kappa \Phi \right) = \kappa Q \quad (3.3.36)$$

と書くことができる。ここで、 $\kappa = R/c_p$ 、 Q は単位時間に加えられる熱である。連続の式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} - \dot{Z} = 0 \quad (3.3.37)$$

となる。

今回のスケール解析において、無次元パラメータは R_o 、 ε 、 L/a に変わるだろう。ここで、 a は地球の半径である。また ε は回転フルード数であり、大気の静的安定度

に反比例する。これは前節で使われた F に対応するので、前節で決定されたスケールは様々な量に対してここで用いられる。各微分は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{V}{L}, \quad \nabla \sim \frac{1}{L}, \quad \frac{\partial}{\partial Z} \sim 1 \quad (3.3.38)$$

と見積もられる。ただし、例外としてコリオリパラメータの空間微分については $\nabla f \sim \beta = 2\Omega \cos \phi / a$ と見積もる。この β に対する式は後に導くことにする。 Z は無次元であり、 $\partial/\partial Z \sim 1$ とすることは鉛直スケールを 8 km とする (対流圏の擾乱に対してはおよそ正しいオーダーである) ことに対応している。速度は、前節と同様に回転部分 V_ψ と発散部分 V_x に分割する ((3.2.13) と (3.2.14) を参照)。またジオポテンシャルについても、

$$\Phi = \bar{\Phi}(Z) + \Phi' \quad (3.3.39)$$

と分割する。ここで、 $\bar{\Phi}(Z)$ は標準大気から引用される。依存変数は次のようにスケールをとる。

$$V_\psi \sim V, \quad V_x \sim R_1 V \quad (3.3.40)$$

$$\dot{Z} \sim R_1 V / L \quad (3.3.41)$$

$$\Phi' \sim fVL \quad (3.3.42)$$

このスケージングは前節と同様のものであり、今のところ未決定の R_1 を使っている。 \dot{Z} のスケールは、 V_x のスケールを用いて連続の式 (3.3.37) から得られる。 Φ' については、地衡風のスケージング (3.2.8) から直接的にスケージングされる。

発散が渦度に比べて小さいことが予期されるので、運動方程式を渦度方程式と発散方程式に置き換えると再び都合が良い。この系に対する渦度方程式を求め、各項をスケージングすれば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_\psi \cdot \nabla \zeta + V_x \cdot \nabla \zeta + V_\psi \cdot \nabla f + V_x \cdot \nabla f + \dot{Z} \frac{\partial \zeta}{\partial Z} \\ & \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \quad \frac{(\beta a / f) L / a V^2}{R_o} \quad \frac{(\beta a / f) L / a R_1 V^2}{R_o} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

$$\begin{aligned} & + fD + \zeta D + \mathbf{k} \cdot \nabla \dot{Z} \times \frac{\partial V_\psi}{\partial Z} + \mathbf{k} \cdot \nabla \dot{Z} \times \frac{\partial V_x}{\partial Z} = 0 \\ & \frac{R_1 V^2}{R_o L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \quad \frac{R_1^2 V^2}{L^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、渦度と発散のスケールは $\zeta \sim V/L$ 、 $D \sim R_1 V/L$ とした。また、 $R_o = V/fL$ は V^2/L^2 の因子を出すために用いられた。次にこの系に対する発散方

程式を導き、各項のスケール解析を行えば

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi) + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi \cdot \mathbf{V}_\psi) \\
 & \qquad \qquad \qquad + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \mathbf{V}_\chi) + \nabla \dot{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_\psi}{\partial Z} + \dot{Z} \frac{\partial D}{\partial Z} \\
 & \frac{R_1 V^2}{L^2} \qquad \frac{V^2}{L^2} \qquad \frac{R_1 V^2}{L^2} \qquad \frac{R_1^2 V^2}{L^2} \qquad \frac{R_1 V^2}{L^2} \qquad \frac{R_1 V^2}{L^2} \\
 & + \nabla \dot{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_\chi}{\partial Z} + \nabla^2 \Phi' - f\zeta - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot \mathbf{V}_\psi - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot \mathbf{V}_\chi = 0 \\
 & \frac{R_1^2 V^2}{L^2} \qquad \frac{1}{R_o} \frac{V^2}{L^2} \qquad \frac{1}{R_o} \frac{V^2}{L^2} \qquad \frac{(\beta a/f)L/a}{R_o} \frac{V^2}{L^2} \qquad \frac{(\beta a/f)L/a}{R_o} \frac{R_1 V^2}{L^2}
 \end{aligned} \tag{3.3.44}$$

となる。連続の式 (3.3.37) は \dot{Z} のスケーリングに用いられたので、全ての項は同じオーダーとなる。

$$\begin{aligned}
 D + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} - \dot{Z} &= 0 \\
 \frac{R_1 V}{L} \qquad \frac{R_1 V}{L} \qquad \frac{R_1 V}{L} &
 \end{aligned} \tag{3.3.45}$$

熱力学第 1 法則 (3.3.36) は、次のようにスケーリングされる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi'}{\partial Z} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi'}{\partial Z} + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi'}{\partial Z} + \dot{Z} \Gamma(Z) \\
 & \qquad \qquad \qquad + \dot{Z} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial Z} + \kappa \Phi' \right) = \kappa Q \tag{3.3.46} \\
 & fV^2 \qquad fV^2 \qquad R_1 fV^2 \qquad \frac{R_1 fV^2}{R_o \varepsilon} \qquad R_1 fV^2
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\Gamma(Z) = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial Z} + \kappa \bar{\Phi} \right) = R \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} + \kappa \bar{T} \right) = \frac{H^2 g}{\bar{T}} \left(\frac{g}{c_p} + \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right) \tag{3.3.47}$$

である。(3.3.47) を書き換える際に、静水圧平衡の式 (3.3.32) と $H = R\bar{T}/g$ を用いた。 Γ は乾燥断熱温度勾配と標準大気温度勾配の差に比例するために、静的安定度と呼ばれる。パラメータ ε は回転フルード数であり、

$$\varepsilon \equiv f^2 L^2 \Gamma^{-1} \tag{3.3.48}$$

と定義される。この量はリチャードソン数を使って書き直される。

$$\varepsilon = 1/(R_o^2 R_i) \tag{3.3.49}$$

ここで、リチャードソン数を

$$R_i = \Gamma/V^2 \quad (3.3.50)$$

と定義した。この量は、風の鉛直シアの平方に対する静的安定度の比である。この後の解析では、(3.3.46)における非断熱加熱項は落とされるだろう。しかし、課された任意の加熱に対して、それがスケール解析に影響を与えるかを調べるために非断熱加熱項は他の項と比べられることがある。

(3.3.48)を計算するために、まず(3.3.50)からリチャードソン数を見積もる。次の値 $g \sim 10 \text{ ms}^{-2}$, $\bar{T} \sim 300 \text{ K}$, $g/c_p + H^{-1}\partial\bar{T}/\partial Z \sim 3.5 \times 10^{-3} \text{ Km}^{-1}$, $H \sim 10^4 \text{ m}$, $V \sim 10 \text{ ms}^{-1}$ を用いることで、

$$R_i \sim 100 \quad (3.3.51)$$

となる。

3.3.1 中緯度の総観スケールの擾乱に対する解析

$L \sim 10^6 \text{ m}$ である中緯度の総観スケールの擾乱を考えよう。このとき各パラメータは、

$$R_o \sim 0.1, \quad L/a \sim 0.1, \quad \varepsilon \sim 1, \quad \beta a/f \sim 1$$

となる。ここで、 $a \sim 6.4 \times 10^6 \text{ m}$, $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ である。 $\varepsilon \sim 1$ であることを用いれば、渦度方程式(3.3.43)と熱力学第一法則(3.3.46)の両方から

$$R_1 \leq R_o \quad (3.3.52)$$

を得る。よって、 $R_1 = R_o$ とすることは適切である。(3.3.44), (3.3.43), (3.3.46) 中のオーダー R_o およびそれより小さい項を全て落とせば、方程式系は次のように簡単化される。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla(\zeta + f) + fD = 0 \quad (3.3.53)$$

$$\nabla^2 \Phi' - f\zeta = 0 \quad (3.3.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi'}{\partial Z} + \mathbf{V}_\psi \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial Z} + \Gamma(Z)\dot{Z} = 0 \quad (3.3.55)$$

渦度方程式(3.3.53)では、風の発散部分による絶対渦度の移流、渦度の鉛直移流、 ζ を含む発散項、立ち上がり項が無視された。また、熱力学第一法則(3.3.55)では、風の発散部分による温度移流、安定性の変動部分が無視された。

今、球面上にベータ平面近似を導入すると便利である。導入する直角座標において、

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{V} = ui + vj \quad (3.3.56)$$

であり、 x が増加する方向が東、 y が増加する方向が北である。(3.3.53)と(3.3.54)における f の空間的な変化は、移流項においてのみ重要となる。

$$\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla f = v_\psi \frac{df}{dy} = v_\psi \beta \quad (3.3.57)$$

ここで、

$$\beta = \frac{d}{dy}(2\Omega \sin \phi) = 2\Omega \cos \phi \frac{d\phi}{dy} = \frac{2\Omega \cos \phi}{a} \quad (3.3.58)$$

である。 f が単なる係数であるときその空間的な変化は重要でないことを示すために、 f を $y = y_0$ のまわりでテーラー級数に展開すれば

$$f = f_0 + \beta_0(y - y_0) + \dots = f_0 \left[1 + \frac{\beta_0}{f_0}(y - y_0) + \dots \right] \quad (3.3.59)$$

となる。解析はスケール L の擾乱を取り扱うので、 y の変化する範囲を $|y - y_0| \leq L$ に制限してもよいだろう。中緯度において $\beta \sim f/a$ であるので、(3.3.59)の第2項は、

$$\left| \frac{\beta_0}{f_0}(y - y_0) \right| \leq L/a \quad (3.3.60)$$

によって大きさを制限される。 $L/a \sim 0.1$ であるので、 f が微分される場合を除いて $f = f_0$ とし、(3.3.57)において β を β_0 によって置き換えることは一貫性がある。ベータ平面近似は、最初に方程式を正角座標に変換し、マップファクターの空間的な変化が無視されることを示すことによって正当化される。マップファクターはふつう緯度に依存する三角関数であるが、 L/a が小さいときそれを定数に置き換えることができる。Phillips(1963)は、メルカトル座標において Z の方程式系を書き、全ての物理量をロスビー数を使って級数展開することによって、方程式系の包括的なスケール解析を行った。ここで考えられるパラメータの範囲において、デカルト座標の使用が適切であるということが彼の解析により示された。

今、渦度方程式(3.3.53)中の D を連続の式(3.3.45)を用いて消去すれば、(3.3.53)は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla(\zeta + \beta_0 y) - f_0 e^Z \frac{\partial}{\partial Z}(e^{-Z} \dot{Z}) = 0 \quad (3.3.61)$$

と書くことができる。また、発散方程式(3.3.54)は次のようになる。

$$\nabla^2 \Phi' = f_0 \zeta = f_0 \nabla^2 \psi \quad (3.3.62)$$

この方程式に対する適切な解は、

$$\psi = f_0^{-1} \Phi' \quad (3.3.63)$$

となるので、風の回転部分および渦度は

$$\mathbf{V}_\psi = f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \Phi', \quad \zeta = f_0^{-1} \nabla^2 \Phi' \quad (3.3.64)$$

となる。

(3.3.55) と (3.3.61) の間で \dot{Z} を消去することで、方程式系を 1 本の方程式にまとめることができる。(3.3.55) を \dot{Z} に対して解き、 e^{-Z} を掛けた後 Z で微分すれば、

$$\frac{\partial}{\partial Z} (e^{-Z} \dot{Z}) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{e^{-Z} \partial \Phi'}{\Gamma} \right) - \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{e^{-Z} \partial \Phi'}{\Gamma} \right) \quad (3.3.65)$$

を得る。なお、 $\partial \mathbf{V}_\psi / \partial Z$ の項は、(3.3.64) を使えば消去することができる。上の式を (3.3.61) に代入して整理すれば、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \right) \left[\zeta + \beta_0 y + e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0 e^{-Z} \partial \Phi'}{\Gamma} \right) \right] = 0 \quad (3.3.66)$$

を得る。この方程式は、準地衡風ポテンシャル渦度方程式(quasi-geostrophic potential vorticity equation)であり、浅水方程式に対する (3.2.28) と対比される。(3.3.64) によって、この方程式を Φ' のみを使って全体を書けば次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[\nabla^2 + e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial Z} \right) \right] \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \\ & = -\mathbf{k} \times \nabla \Phi' \cdot \left[f_0^{-1} \nabla^2 \Phi' + \beta_0 y + e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial Z} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.67)$$

Φ' の分布が初期に知られているならば、右辺を計算することができるだろう。左辺の演算子は楕円演算子であるので、もし適切な境界条件が指定されるならば、(3.3.67) は $\partial \Phi' / \partial t$ に対して解くことができる。

準地衡風方程式は、任意の特定の時間における \dot{Z} もまた決定する。これを研究するために、渦度方程式 (3.3.61) と熱力学第一法則 (3.3.55) を次のように書き換える。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = f_0^{-1} \nabla^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla (\zeta + \beta_0 y) + f_0 e^Z \frac{\partial}{\partial Z} (e^{-Z} \dot{Z}) \quad (3.3.68)$$

$$R \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi'}{\partial Z} - \Gamma(Z) \dot{Z} \quad (3.3.69)$$

渦度の移流 $-\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla (\zeta + \beta_0 y)$ と温度の移流 $-\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla (\partial \Phi' / \partial Z)$ が与えられたならば、 $\partial \zeta / \partial t$ と $\partial T' / \partial t$ が $\partial \Phi' / \partial t$ によって地衡風・静水圧的に与えられるのと同様にして一意に決定される。 \dot{Z} に対する診断方程式は、(3.3.68) を Z で微分し、それを (3.3.69) に $f_0 \nabla^2$ を作用させた式で引くことによって得られる。

$$\begin{aligned} & \Gamma(Z) \nabla^2 \dot{Z} + f_0^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(e^Z \frac{\partial}{\partial Z} (e^{-Z} \dot{Z}) \right) \\ & = f_0 \frac{\partial}{\partial Z} [\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla (\zeta + \beta_0 y)] - \nabla^2 [\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi'}{\partial Z}] \end{aligned} \quad (3.3.70)$$

これは、準地衡風鉛直運動方程式(quasi-geostrophic vertical motion equation)と呼ばれる。この方程式は時間微分の項を含まず、前節の準地衡風発散方程式(3.2.29)と類似する。右辺は(3.3.64)を用いることで Φ' を使って全体を書き換えることができる。もし Φ' の分布が任意の時間において与えられているならば、左辺の演算子は楕円演算子であるので、 \dot{Z} に対して方程式を解くことができる。鉛直速度 \dot{Z} が(3.3.70)から計算されたとき、発散は連続の式(3.3.45)から発散を得ることができる。よって、(3.3.68)を使えば発散は渦度の関数となることが分かる。このことは、ロスビー数が小さいときに強く効いてくる回転の制約の結果である。

(3.3.70)は、総観規模の現象の研究において診断的な道具としてよく用いられる。もし Φ' の場が既知ならば、研究または準地衡風の予報におけるいくつかの目的のために、(3.3.70)を解くことによって鉛直運動を発見することができる。そのとき、この鉛直運動の場は降水や雲パターンと関係付けられる可能性がある。

(3.3.67)あるいは(3.3.70)を解くためには、境界条件が大気上端と地表において指定されなければならない。 \dot{Z} が既知であるならば、(3.3.67)を解くために、(3.3.55)を使って $(\partial/\partial Z)(\partial\Phi'/\partial t)$ を計算することができる。大気上端($Z \rightarrow \infty$)の境界条件は、 \dot{Z} が有限であることである。一方、下部境界の境界条件を決定するためには、 \dot{Z} を w と関係付ける必要がある。 $gw = d\Phi/dt$ を展開し、各項をスケーリングすれば次のようになる。

$$gw = \frac{\partial\Phi'}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla\Phi' + \mathbf{V}_x \cdot \nabla\Phi' + \dot{Z} \frac{\partial\Phi'}{\partial Z} + \dot{Z} R\bar{T} \quad (3.3.71)$$

$$fV^2 \quad fV^2 \quad R_1 fV^2 \quad R_1 fV^2 \quad \frac{R_1}{R_o} M fV^2$$

ここで、 $\partial\Phi/\partial Z = R\bar{T}$ となることを用いた。また、 M は次のように定義される。

$$M \equiv R\bar{T}/f^2 L \quad (3.3.72)$$

これは、回転フルード数の逆数である。ここで考えられているスケールでは、 $R_1 = R_o$ 、 $M \sim 10$ である。ただし、 $R\bar{T} \sim 10^5 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ とした。第3.2節の浅水系において導入した回転フルード数は、 H を静止しているときの自由表面高度とすれば $f^2 L^2/gH$ であった。今 H はスケールハイトに対応するので $H = RT^*/g$ であり、対流圏においては $M = F^{-1}$ がおおよそ成り立つことに注意されたい。これらの条件のもとで、(3.3.71)の右辺の最後の項は支配的であり、この方程式は

$$gw = R\bar{T}\dot{Z} \quad (3.3.73)$$

と近似される。このことは、鉛直速度の典型的な値が $w \sim g^{-1} fV^2 M \sim 1 \text{ cms}^{-1}$ であることを示している。(3.3.73)が下部境界 $Z = Z_s$ において適用されるとき、方程式は

$$\dot{Z}_s = (g/R\bar{T})w_s = (g/R\bar{T})\mathbf{V} \cdot \nabla h_s \quad (3.3.74)$$

ここで, $h_s(x, y)$ は下部境界の高度である. エクマン層の上端における鉛直速度 (Charney and Eliassen, 1949) が加えられ得るが, Phillips(1963) はそれがとても小さいためにこの解析において重要とならないことを示した. 山岳がなければ, (3.3.74) から $\dot{Z}_s = 0$ となる.

Z_s は一般には空間に依存するが, 定数の Z_s (例えば $Z_s = 0$) に対して (3.3.74) を適用すると都合がよい^{*4}. このことは, $p = p_0$ の等圧力面で (3.3.74) を適用することに対応する. $Z = 0$ に対して下部境界条件を適用したことによる任意の変数の誤差は, その変数を Z についてテーラー展開することによって知ることができ, その結果的に誤差は Z_s となる^{*5}. したがって, 滑らかな山岳が $H/10$ (~ 1 km) よりも高くない限り, 下部境界の山岳の起伏を無視するこの近似は, 最大の項に対してオーダー $1/10$ である項を無視する近似と一貫性がある.

準地衡風方程式において圧力座標系を用いると便利である. (3.3.33) と (3.3.34) を用いれば, 渦度方程式 (3.3.61) と熱力学第一法則 (3.3.55) は,

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \right) (\zeta + \beta_0 y) - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (3.3.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \sigma(p) \omega = 0 \quad (3.3.77)$$

となる. ここで,

$$\sigma(p) = \Gamma/p^2 = p^{-1} \frac{d}{dp} \left(p \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p} - \bar{\Phi} \right)$$

とおいた. ポテンシャル渦度方程式 (3.3.66) は, 圧力座標系において次のように書かれる.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + f_0^{-1} \mathbf{V} \times \nabla \Phi \cdot \nabla \right) \left[f_0^{-1} \nabla^2 \Phi + \beta_0 y + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma(p)} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] = 0 \quad (3.3.78)$$

^{*4}本来は山岳の存在により下部境界の Z である Z_s は空間に依存し, そのような $Z = Z_s$ に対して下部境界条件 (3.3.74) を適用しなければならない. しかし, 今そのような山岳の起伏を無視して下部境界が平らである ($Z_s = 0$) と近似しよう. そして, $Z_s = 0$ に対して下部境界条件を適用することを考える.

^{*5}例えば温度の変数 $T(x, y, Z, t)$ を Z について $Z = 0$ まわりでテーラー展開すれば,

$$A(x, y, Z, t) = \mathbf{V}(x, y, 0, t) + \left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=0} Z + \dots$$

したがって, $Z = Z_s$ における値を用いるかわりに $Z = 0$ における値を用いたことによって生じる誤差は

$$\frac{T(Z_s) - T(Z)}{R^{-1}(\partial^2 \bar{\Phi} / \partial Z^2)_{Z=0}} \sim \frac{T(Z_s) - T(Z)}{T^*} \sim Z_s \quad (3.3.75)$$

となる. ただし, $\partial / \partial Z \sim 1$ であることを用いた.

また、圧力座標系において鉛直運動の方程式 (3.3.70) は、

$$\sigma \nabla^2 \omega + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = f_0 \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla (\zeta + \beta_0 y)) - \nabla^2 \left(\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right) \quad (3.3.79)$$

の形式をとる。この方程式は、準地衡風オメガ方程式 (quasi-geostrophic omega equation) と呼ばれる。

3.3.2 熱帯の総観スケールの擾乱に対する解析

熱帯の総観スケールの擾乱に対する各無次元パラメータの値は、コリオリパラメータを 10^{-5} s^{-1} (赤道から緯度約 10 度の範囲における特徴的な値) と見積もり、他のスケールを変えなければ、

$$R_o \sim 1, \quad L/a \sim 0.1, \quad \varepsilon \sim 10^{-2}, \quad \beta L/f \sim 1 \quad (3.3.80)$$

となる。ここで、 ε は (3.3.49) において $R_i = 100$ として計算された。また、今回の場合には、赤道上でゼロであるコリオリパラメータが距離 L だけ赤道から離れると典型的な値 f まで変化するので、 $\beta \sim f/L$ である。このとき、渦度方程式 (3.3.43) は $R_1 \leq R_o \sim 1$ であることを要求する一方で、熱力学第一法則 (3.3.46) は $R_1 \leq R_o \varepsilon \sim \varepsilon$ であることを課す。よって適切な値は、

$$R_1 = \varepsilon \quad (3.3.81)$$

となる。(3.3.43) においてオーダ $V^2/10L^2$ の項とそれ以下の項を落とせば、渦度方程式は次のように近似される。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla (\zeta + f) = 0 \quad (3.3.82)$$

また、発散方程式 (3.3.44) は

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \mathbf{V}_\psi) + \nabla^2 \Phi' - f \zeta - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot \mathbf{V}_\psi = 0 \quad (3.3.83)$$

となる。この方程式はバランス方程式 (balance equation) と呼ばれ、プリミティブ方程式のモデルの初期化によく使われる。発散が (3.3.82) に現れないために、熱力学第一法則はこの方程式系において必要とされない。しかしながら、熱帯で強い加熱が発生するならば、(3.3.46) 中の非断熱加熱項は fV^2 よりも大きくなるだろう。この場合には、鉛直運動のスケールリング (3.3.81) は修正する必要があり、結果的に発散の項が渦度方程式 (3.3.82) に現れる。このとき、(3.3.46) において非断熱加熱の項と鉛直運動の項との間でバランスされていることが分かる。

たとえ加熱を考慮したとしても, ここで行われたスケール解析は熱帯において重要な全ての運動に対応していない. 赤道ケルビン波や特定の混合ロスビー波は, ここで用いた移流時間スケールでは適切に取り扱うことができない. また, これらの波はここで仮定されたよりも小さな鉛直スケールを持っている (第4章を参照)

3.3.3 惑星スケールの擾乱に対する解析

大気中の最も大きいスケールをもつ運動に対して, 各無次元パラメータは

$$L/a \sim 1, \quad R_o \leq 0.01, \quad \varepsilon \sim 100, \quad \beta a/f \sim 1$$

となる. これらの条件のもとで, 渦度方程式 (3.3.43) の最大の項は

$$R_1 \sim 1 \quad (3.3.84)$$

であるときのみ他の項とバランスできる. このスケーリングは, 熱力学第一法則 (3.3.46) に対しても一貫性がある. このとき, (3.3.43) と (3.3.44) において支配的な項は,

$$(\mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi) \cdot \nabla f + fD = 0 \quad (3.3.85)$$

$$\nabla^2 \Phi' - f\zeta - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot (\mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi) = 0 \quad (3.3.86)$$

となる. 速度ベクトルが地衡風であるとき, 上の式の両方が満たされる. すなわち,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi = f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \Phi' \quad (3.3.87)$$

熱力学第一法則の式において, 全ての項は同じオーダーである. 惑星スケールの運動に対する予報方程式系を構成する方程式は, (3.3.45), (3.3.46), (3.3.87) となる. この節での解析は, V よりもはるかに大きい位相速度をもつ惑星スケールのロスビー波 (自由波) を含んでいない (第4章参照). しかしながら, 惑星スケールの波動に伴うこれらの大きな位相速度はめったに観測されない. このことは, 惑星スケールの運動は, 主に加熱や山岳の効果およびおそらくより小さなスケールの非線形相互作用によって励起されることを示唆している. これらの運動を予報することは難しく, 境界条件がとても重要となる (第7章参照).

3.4 バランスシステム

上で考慮された様々な場合に対して、より広範囲において適用可能な全ての項を含む方程式系を導くことが望まれるだろう。そして、総観スケールの運動に対してより正確であることも望まれる。Charney(1962)は、総観規模のスケール解析においてオーダー R_o とそれよりも大きなオーダーを持つ項を全て残したバランスシステム(balance system)を発表した。結果的な方程式系は、次のようになる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi) \cdot \nabla(\zeta + f) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + (f + \zeta)D + \mathbf{k} \cdot \nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{V}_\psi}{\partial p} = 0 \quad (3.4.88)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi) + \nabla^2 \Phi - f\zeta - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot \mathbf{V}_\psi = 0 \quad (3.4.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + (\mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\omega}{p} \frac{\partial}{\partial p} \left[p \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \kappa \Phi \right] = 0 \quad (3.4.90)$$

$$(3.4.91)$$

他の関係式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\psi &= \mathbf{k} \times \nabla \psi, & \mathbf{V}_\chi &= \nabla \chi \\ \zeta &= \nabla^2 \psi, & D &= \nabla^2 \chi \end{aligned} \quad (3.4.92)$$

上の方程式は応用に便利な圧力座標系で書かれている。渦度方程式において、唯一落とされた項は風の発散部分を含んでいる立ち上がり項である。発散方程式においては、風の発散部分に依存する項は全て落とされている。 ψ や Φ を使って書かれる結果的な方程式は、バランス方程式(balance equation)と呼ばれる。熱力学第一法則は、全ての項が残されている。加熱項や摩擦項は今除去されているが、それらの項が他の残された項に比べて同程度かそれより大きい場合には、方程式系に加える必要がある。

バランスシステムはスケール解析を使って導いたため、初期状態の小さな誤差に敏感ではない。発散方程式において発散の時間変化の項を無視したので、方程式系は重力波を解に持たない。総観スケールの運動に対して、無視された最大の項のオーダーは R_o^2 である。また、方程式系は熱帯や惑星スケールに対するスケール解析において得られたほぼ全ての項を含んでいる。例外があるとすれば、 $-\mathbf{k} \times f \cdot \mathbf{V}_\psi$ の項である。この項は、惑星スケールの運動に対して発散方程式において必要とされる。エネルギーの一貫性に影響を与えることなく、この項を (3.4.89) に付け加えることができるが、この項が存在することで方程式の解を複雑にするだろう。方程式は、 f の完全な緯度依存性もまた維持している^{*6}。 f の完全な緯度依存性は、より広い予報領域を採用したとき重要になってくる。

^{*6}準地衡風方程式では f の空間微分を除いて、 f は全て定数 f_0 によって置き換えられる。

残念ながら、バランスシステムは陰的な形式をしている方程式を持つために解くことが非常に難しい。準地衡風方程式系のように、簡潔なポテンシャル渦度方程式やオメガ方程式を導くことは不可能である。加えて、バランスシステムはケルビン波といったいくつかの重要な熱帯の循環を記述できない。結果として、バランスシステムは業務的な数値予報にはあまり使われない。ふつう、準地衡風方程式系を使って得られるよりも精度の高い情報を必要とするときには、プリミティブ方程式が用いられる。しかしながら、バランスシステムは依然としてプリミティブ方程式の初期化や特定の力学過程を理解する上で役に立つ。