# 物理数学補足ノート(直交曲線座標)

**河合 佑太**
神戸大学 地球惑星科学科

平成 22 年 11 月 27 日

# 目 次

# 第1章　直交曲線座標における座標変換と微分演算子

直交座標で書かれた微分方程式や偏微分方程式を解く際に, 問題の特性 (例えば現象の対称性など) に応じて他の座標系を導入すると便利なことがある. そのような座標変換を行うとき, 微分演算子も座標変換を行う必要がある. ここでは, デカルト座標, 円柱座標, 極座標, 球座標などは直交曲線座標として一般化されることを説明し, 直交曲線座標系における微分演算子の一般的な形式を求める.

## 1.1　直交曲線座標

線素ベクトル $d\boldsymbol{r}$ は直交座標系 $(x_1, x_2, x_3)$ では,

$$d\boldsymbol{r} = \sum_i dx_i\, \boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.1.1}$$

と表される. ここで, $\boldsymbol{e}_i$ は $x_i$ 方向に対する基底ベクトルである.

今, 点 $\boldsymbol{r}$ の直交座標 $(x_1, x_2, x_3)$ がもう一組の座標 $(q_1, q_2, q_3)$ を使って,

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$$

と表される場合を考える. このとき, $x_i$ の全微分は

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j. \tag{1.1.2}$$

(1.1.2) を (1.1.1) に代入すれば,

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \sum_i \boldsymbol{e}_i \left( \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \right) \\ &= \sum_j \left( \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) dq_j = \sum_i \boldsymbol{r}_i\, dq_i \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

となる．ここで,

$$\boldsymbol{r}_i = \sum_j \boldsymbol{e}_j \, \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{1.1.4}$$

とおいた．さらに, 上で定義した 3 つのベクトル $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ が空間の任意の点において互いに直交するとき, つまり,

$$\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \tag{1.1.5}$$

であるとき, $(q_1, q_2, q_3)$ は直交曲線座標であるという．$(q_1, q_2, q_3)$ が直交曲線座標であるとき, $\boldsymbol{r}_i$ を次のように正規化して, この直交曲線座標の正規直交基底 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ を導入しよう．

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{r}_i / h_i \tag{1.1.6}$$

ここで, スケール因子 $h_i$ を $h_i = |\boldsymbol{r}_i|$ と定義した．すなわち,

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2} \tag{1.1.7}$$

である．(1.1.6) を用いると, 線素ベクトル $d\boldsymbol{r}$ は

$$d\boldsymbol{r} = \sum_i h_i dq_i \, \tilde{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.1.8}$$

と表される．(1.1.8) において, 直交座標 $(x_1, x_2, x_3)$ は $q_i = x_i$, $h_i = 1$ の場合に対応する．直交座標のスケール因子が 1 なることから, 直交座標が直交曲線座標のスケールの基準となっていることが確認できる．

スケール因子 $h_i$ と直交曲線座標の正規直交基底 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ について, 少し説明を加えておく．スケール因子は, (1.1.6) の定義からも分かるように各座標方向の尺度因子となっており, 一般に座標 $(q_1, q_2, q_3)$ に依存する．また, 正規直交基底 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ は定義からその大きさと直交関係は不変であるが, 方向は一般に座標とともに変化する．$h_i$ と $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ の方向が座標に依存することが, 直交曲線座標による表現を直交座標による表現に比べてより複雑にしている．

## 1.2 直交座標と直交曲線座標の間の基底変換

(1.1.4) と (1.1.6) を用いれば, 直交曲線座標の基底は直交座標の基底を使って,

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i = \frac{1}{h_i} \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \, \boldsymbol{e}_j \tag{1.2.9}$$

と書ける．この式を基底変換行列 $P$ で表現すれば，

$$[\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2,\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3] = [\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3]\ P. \tag{1.2.10}$$

ただし，行列 $P$ の $(i,j)$ 成分 $P_{ij}$ は

$$P_{ij} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{1.2.11}$$

である．ここで，(1.2.10) において $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ と $\boldsymbol{e}_i$ が正規直交基底であることから，$P$ は直交行列であることに注意されたい．すなわち，

$$P^{-1} = P^T \tag{1.2.12}$$

が成り立つ．

今度は逆に，直交曲線座標の基底を使って直交座標の基底を表すことを考える．

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \sum_i dx_i\ \boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_i h_i dq_i\ \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \sum_i h_i \left(\sum_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} dx_j\right)\ \tilde{\boldsymbol{e}}_i \\ &= \sum_i \left(\sum_j h_j \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\ \tilde{\boldsymbol{e}}_j\right)\ dx_i \end{aligned}$$

の $dx_i$ の係数を比較すれば，

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_j h_j \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\ \tilde{\boldsymbol{e}}_j \tag{1.2.13}$$

を得る．また，(1.2.10) から，

$$[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3] = [\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2,\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3]\ P^{-1} \tag{1.2.14}$$

と書けるので，$P^{-1}$ の $(i,j)$ 成分は

$$(P^{-1})_{ij} = h_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \tag{1.2.15}$$

となる．また，基底交換行列 $P$ が交代行列であることを用いれば，(1.2.15) は次のようにも書ける．

$$(P^{-1})_{ij} = (P^T)_{ij} = P_{ji} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{1.2.16}$$

したがって，(1.2.13) は

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_j\ \tilde{\boldsymbol{e}}_j (P^{-1})_{ji} = \sum_j \frac{1}{h_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\ \tilde{\boldsymbol{e}}_j \tag{1.2.17}$$

とも書ける．

## 1.3 直交曲線座標の基底の微分

(1.1.8) より,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} = h_1 \tilde{\boldsymbol{e}}_1, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2} = h_2 \tilde{\boldsymbol{e}}_2, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} = h_3 \tilde{\boldsymbol{e}}_3.$$

ここで基底ベクトルの直交性から, $\alpha \neq \beta$ に対して

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\beta} = (h_\alpha \tilde{\boldsymbol{e}_\alpha}) \cdot (h_\beta \tilde{\boldsymbol{e}_\beta}) = 0 \tag{1.3.18}$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right) \\ =& 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} = 2h_3 \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

を得る. すなわち, ベクトル $\partial^2 \boldsymbol{r}/\partial q_1 \partial q_2$ は $\tilde{\boldsymbol{e}_3}$ と直交し, $\tilde{\boldsymbol{e}_1}$ と $\tilde{\boldsymbol{e}_2}$ の一次結合で表される. また, $\tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_i = 1$ の両辺を $q_j$ で微分すれば $2\tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \partial \tilde{\boldsymbol{e}}_i/\partial q_j = 0$ となることから, $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ と $\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_i/\partial q_j$ もまた直交する.

次に, (1.3) の前 2 式をそれぞれ $q_2,\ q_1$ で微分すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_2} =& h_1 \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} + \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \\ =& h_2 \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_1} + \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

となる. 前述した基底とその微分の直交性を上の式に対して考慮すれば,

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \quad \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\tilde{\boldsymbol{e}}_2, \tag{1.3.21}$$

を得る. 他の添字に対しても同様のことを考えれば, $i \neq j$ に対して基底 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ の $q_j$ 微分は

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial q_i}\tilde{\boldsymbol{e}}_j \tag{1.3.22}$$

で与えられる.

一方, 基底 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ の $q_i$ 微分は (1.3.22) を用いて次のように計算される.

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}(\tilde{\boldsymbol{e}_2} \times \tilde{\boldsymbol{e}_3}) = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\tilde{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3}\tilde{\boldsymbol{e}}_3 \tag{1.3.23}$$

同様にすれば,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_2} &= -\frac{1}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3}\tilde{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\tilde{\boldsymbol{e}}_3 \\
\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_3}{\partial q_3} &= -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2}\tilde{\boldsymbol{e}}_2
\end{aligned}
\tag{1.3.24}
$$

を得る.

# 第2章　直交曲線座標における各種微分演算子の表現

## 2.1　勾配

直交曲線座標系におけるスカラー関数 $f$ の勾配の形式を求める．直交座標系での勾配は,

$$\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{2.1.1}$$

である．ここで,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_l \frac{\partial f}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial x_i} \tag{2.1.2}$$

と変形し, 直交座標の基底 $\boldsymbol{e}_i$ を (1.2.17) を使って直交曲線座標の基底に変換すれば, (2.1.1) は次のように変形される.

$$\begin{aligned}\nabla f =& \sum_i \left(\sum_l \frac{\partial f}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\right)\left(\sum_m \frac{1}{h_m}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\ \tilde{\boldsymbol{e}_m})\right) \\ =& \sum_l \sum_m \frac{1}{h_m}\frac{\partial f}{\partial q_l}\tilde{\boldsymbol{e}_m}\left(\sum_i \frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\right) \\ =& \sum_l \sum_m \frac{1}{h_m}\frac{\partial f}{\partial q_l}\tilde{\boldsymbol{e}_m}\delta_{l,m} \\ =& \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\tilde{\boldsymbol{e}}_i\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

したがって, 直交曲線座標におけるスカラー関数 $f$ の勾配は

$$\nabla f = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\tilde{\boldsymbol{e}}_i \tag{2.1.4}$$

となる.

## 2.2 発散

直交曲線座標系におけるベクトル

$$\boldsymbol{u} = \sum_i u_i\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i$$

の発散の形式を求める.

直交曲線座標においてハミルトン演算子の形式は,

$$\nabla = \sum_i \tilde{\boldsymbol{e}}_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}$$

であるので, ベクトル $\boldsymbol{u}$ の発散は次のように計算される.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{u} &= \sum_i \frac{1}{h_i}\tilde{\boldsymbol{e}}_i\cdot\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_j u_j\, \tilde{\boldsymbol{e}}_j\right)\\ &= \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial u_i}{\partial q_i} + \left(\sum_{i,j}\frac{u_i}{h_i}\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i\cdot\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_j}{\partial q_i}\right)\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

さらに, 2 項目の計算を続ける. 基底とその微分は直交することに注意し, (1.3.22) を用いれば,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\frac{u_i}{h_i}\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i\cdot\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_j}{\partial q_i} &= \sum_{i,j\ (i\neq j)}\frac{u_i}{h_i}\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i\cdot\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_j}{\partial q_i}\\ &= \sum_{i,j\ (i\neq j)}\frac{u_i}{h_i}\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i\cdot\left(\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial q_j}\tilde{\boldsymbol{e}}_i\right)\\ &= \sum_{i,j\ (i\neq j)}\frac{u_j}{h_i h_j}\frac{\partial h_i}{\partial q_j}\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

となる.

最後に, (2.2.5), (2.2.6) の結果を微分のチェーンルールを使って整理すれば, 直交曲線座標系における発散の形式が次のように得られる.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3u_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3h_1u_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2u_3)\right] \tag{2.2.7}$$

## 2.3 回転

直交曲線座標系におけるベクトル

$$\boldsymbol{u} = \sum_i u_i\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i$$

の回転の形式を求める.

ベクトル $\boldsymbol{u}$ の回転は直交曲線座標系において, 次のように計算される. まず, ベクトル恒等式

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A} \times \nabla\phi + \phi\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{2.3.8}$$

を使えば,

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = -\sum_i \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}} \times \nabla u_i + \sum_i u_i \nabla \times \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}. \tag{2.3.9}$$

となる.

右辺の一つ目の総和の $i=1$ について計算を行う.

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \times \nabla u_1 =& \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \times \left( \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial u_1}{\partial q_l} \tilde{\boldsymbol{e}}_l \right) \\
=& \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \times \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} \tilde{\boldsymbol{e}}_2 + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \times \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_1}{\partial q_3} \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \\
=& \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}} \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} - \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_1}{\partial q_3}
\end{aligned}$$

残りの $i$ に対しても同様にすれば,

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \times \nabla u_2 &= -\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_2}{\partial q_3}, \\
\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}} \times \nabla u_3 &= \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_3}{\partial q_1} - \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_3}{\partial q_2}.
\end{aligned}$$

続いて, 右辺の二つ目の総和の $i=1$ について計算を行う.

$$\begin{aligned}
u_1 \nabla \times \tilde{\boldsymbol{e}}_1 =& u_1 \left( \sum_l \tilde{\boldsymbol{e}}_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial}{\partial q_l} \right) \times \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \\
=& u_1 \left[ \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \times \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_1} + \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \times \frac{1}{h_2} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} + \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \times \frac{1}{h_2} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} \right]
\end{aligned}$$

ここで, (1.3.22) および (1.3.23) を用いれば,

$$
\begin{aligned}
u_1\nabla \times \tilde{\boldsymbol{e}}_1 =& \frac{u_1}{h_1}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 \times \left[ -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\tilde{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3}\tilde{\boldsymbol{e}}_3 \right] \\
=& -\frac{u_1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\tilde{\boldsymbol{e}}_3 + \frac{u_1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3}\tilde{\boldsymbol{e}}_2
\end{aligned}
$$

を得る. 残りの $i$ についても同様の計算をすれば,

$$
\begin{aligned}
u_2\nabla \times \tilde{\boldsymbol{e}}_2 &= \frac{u_2}{h_2 h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\tilde{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{u_2}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3}\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \\
u_3\nabla \times \tilde{\boldsymbol{e}}_3 &= \frac{u_3}{h_3 h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{u_3}{h_3 h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1}\tilde{\boldsymbol{e}}_2.
\end{aligned}
$$

以上の結果をまとめれば, 微分のチェーンルールを使ってまとめれば, 直交曲線座標における回転の表記は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{u} =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\Bigg[ h_1 \left\{ \frac{\partial (h_3 u_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial q_3} \right\} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 + h_2 \left\{ \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (h_3 u_3)}{\partial q_1} \right\} \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \\
& + h_1 \left\{ \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial q_2} \right\} \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \Bigg]
\end{aligned}
\tag{2.3.10}
$$

## 2.4 ラプラシアン

直交曲線座標系におけるスカラー関数 $f$ に対するラプラシアンの形式を求める.

ラプラシアンは勾配ベクトルに発散を作用させたもの, すなわち

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

であるので, 既に求めた直交曲線座標における勾配と発散の形式 (2.1.4), (2.4.11) を利用すればただちに求まる. 結果,

$$
\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[ \frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{h_2 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{h_2 h_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}) \right] \tag{2.4.11}
$$

を得る.

## 2.5 全微分

### 2.5.1 スカラーの全微分

任意のスカラー関数 $A = A(q_1, q_2, q_3, t)$ の全微分の表記について考える.

今, $A$ は $(q_1, q_2, q_3, t)$ の 4 変数に依存するのでその全微分は

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{dq_i}{dt}\frac{\partial A}{\partial q_i} \tag{2.5.12}$$

と書ける. また, 直交曲線座標系において微小変位 $d\boldsymbol{r}$ は (1.1.8) から

$$d\boldsymbol{r} = \sum_i h_i dq_i \tilde{\boldsymbol{e}}_i \tag{2.5.13}$$

と表されるので, 速度ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/dt$ をベクトル $\boldsymbol{V} = \sum_i V_i \tilde{\boldsymbol{e}}_i$ を使って次のように定義しよう.

$$V_i = h_i \frac{dq_i}{dt}$$

これを (2.5.13) に適用すれば,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{V_i}{h_i}\frac{\partial A}{\partial q_i} \tag{2.5.14}$$

を得る. また全微分の演算子の形式としては,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + + \sum_i \frac{V_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i} \tag{2.5.15}$$

と書ける.

### 2.5.2 ベクトルの全微分

直交曲線座標系における $(x, y, z, t)$ に依存する任意のベクトル

$$\boldsymbol{F} = \sum_i F_i \, \tilde{\boldsymbol{e}}_i$$

の全微分の形式を求める.

微分のチェーンルールにより

$$\frac{d\boldsymbol{F}}{dt} = \sum \frac{dF_i}{dt}\tilde{\boldsymbol{e}}_i + \sum_i F_i \frac{d\tilde{\boldsymbol{e}}_i}{dt}. \tag{2.5.16}$$

正規直交基底 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ は局所的には時間について変化しないことに注意し, (2.5.15) を用いれば,

$$\frac{d\boldsymbol{F}}{dt} = \sum_i \left[ \left( \frac{\partial F_i}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla F_i \right) \tilde{\boldsymbol{e}}_i + F_i \sum_l \left( \frac{V_l}{h_l} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_i}{\partial q_l} \right) \right] \tag{2.5.17}$$

となる.

$$F_i \sum_l \left( \frac{V_l}{h_l} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_i}{\partial q_l} \right)$$

の具体的な表記を求めるには基底ベクトルの微分の計算が必要となるが, それには (1.3.22) および (1.3.23) を用いることになる. 代入後の具体的な表記は, かなり複雑であるので割愛する.

ここでは, 特に $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}$ の場合の (2.5.17) の具体的な表記を示すことにしよう.

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \sum_i \left[ \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla V_i \right) + \sum_l \left( \frac{V_i V_l}{h_i h_l} \frac{\partial h_i}{\partial q_l} - \frac{V_l V_l}{h_l h_i} \frac{\partial h_l}{\partial q_i} \right) \right] \tilde{\boldsymbol{e}}_i \tag{2.5.18}$$

上の式の大括弧内の $l$ についての総和は, $l = i$ の際にはゼロとなることに注意されたい.

# 第3章　使用例

## 3.1　球座標系

これまでの議論を利用して, 球座標 $(r, \theta, \phi)$ におけるスケール因子および各種微分演算子の形式を導こう. この極座標系の正規直交基底はそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ とする.

球座標 $(r, \theta, \phi)$ と直交座標 $(x, y, z)$ の間には,

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

の関係がある. ここで $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$ と考えれば,

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2} \tag{3.1.1}$$

を使って, スケール因子は次のように求まる.

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta. \tag{3.1.2}$$

よって, ハミルトン演算子は

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{3.1.3}$$

となる.

また, ベクトル $\boldsymbol{u} = u_r\boldsymbol{e}_r + u_\theta\boldsymbol{e}_\theta + u_\phi\boldsymbol{e}_\phi$ の発散は,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial(u_r r^2\sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\theta r\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(r u_\phi)}{\partial\phi}\right\} \tag{3.1.4}$$

となる. これを整理すれば,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} \tag{3.1.5}$$

を得る.

最後に, ベクトル $\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{e}_r + u_\theta \boldsymbol{e}_\theta + u_\phi \boldsymbol{e}_\phi$ の回転の形式を各方向ごとに示す. $\nabla \times \boldsymbol{u} = (\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi)$ とすれば,

$$\begin{aligned}\omega_r =& \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(u_\phi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}\right\}, \\ \omega_\theta =& \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\phi)}{\partial r}, \\ \omega_\phi =& \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}.\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

# 参考文献

[1] 巽友正: 流体力学 (培風館)

[2] 数値流体力学編集委員会: 非圧縮流体解析 (東京大学出版会)