

第1章 大気の運動を支配する基礎方程式

1.1 イントロダクション

(工事中)

1.2 運動方程式

慣性系に対する運動の法則は、ニュートンの第2法則により、

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = M \quad (1.2.1)$$

と表される。ここで、 M は単位質量あたりの力のベクトルの合計であり、添字 a は慣性系から観測される速度や加速度を表している。しかしながら、これらの量は宇宙空間を移動する地球上で観測されるので、地球と相対的に測られた変数を使って、運動を記述するのが望まれる。この場合、考慮されるべき重要な運動は地球の自転であり、公転といった他の運動は無視してよいだろう。地球の自転角速度ベクトルを Ω とすれば、流体要素の絶対速度 V_a は地球に対する相対速度 V と自転による速度の和で書ける。すなわち、

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r}. \quad (1.2.2)$$

ここで、 \mathbf{r} は地球の中心を原点とした時の流体要素の位置ベクトルである。

慣性系における基底ベクトルを i_1, i_2, i_3 、回転系における基底ベクトルを i'_1, i'_2, i'_3 としたとき、任意のベクトル A は2つの座標系で

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^3 A_n i_n = \sum_{n=1}^3 A'_n i'_n$$

と書ける。時間微分をとれば、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \sum_{n=1}^3 \frac{dA_n}{dt} i_n \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{dA'_n}{dt} i'_n + \sum_{n=1}^3 A'_n \frac{di'_n}{dt} \end{aligned}$$

となる。回転系の基底ベクトルの時間微分は、 $di'_n/dt = \Omega \times i'_n$ で与えられるので、

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \Omega \times \mathbf{A} \quad (1.2.3)$$

を得る。ここで、 d_a/dt は慣性系における時間変化率、 d/dt は回転系における時間変化率を表す。よって、地球の中心に固定された系で観測される任意のベクトル全微分は、回転系における全微分と $\Omega \times A$ の和として表されることが示された。

(1.2.3) の任意のベクトルとして V_a を選び、右辺の V_a は (1.2.2) を使って V に書き直せば、

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d(\mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r})}{dt} + \Omega \times (\mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r}).$$

自転角速度ベクトル Ω の時間変化を無視すれば,

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{V} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}). \quad (1.2.4)$$

を得る.

大気運動における主要な力は、気圧傾度力、引力 g_a 、摩擦力 F である。これらの力と (1.2.4) を (1.2.1) に導入すれば、地球の自転運動に相対的な運動に対する方程式

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\alpha \nabla p - 2\Omega \times \mathbf{V} + \mathbf{g} + \mathbf{F} \quad (1.2.5)$$

が得られる。ここで、 α は比容であり、重力 \mathbf{g} は地球の引力 g_a と遠心力 $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ の和である。右辺の第 2 項 $-2\Omega \times \mathbf{V}$ は、コリオリ力 (coriolis force) と呼ばれる。

1.3 連続の式

2 つ目の基本法則は、質量の保存である。ここで、直交座標系内にある無限小体積 $\delta x \delta y \delta z$ をもった直方体を考えよう。この直方体の中心は、点 (x, y, z) に存在するとする。この直方体の x 軸に垂直な面を通して単位時間あたりに出入りする質量を、テーラー展開を使って近似する。左側の壁を通して流入する質量は $[\rho u - (\partial \rho u / \partial x) \frac{\delta x}{2}] \delta y \delta z$ 、右側の壁を通して流出する質量は $[\rho u + (\partial \rho u / \partial x) \frac{\delta x}{2}] \delta y \delta z$ となる。よって、 x 軸に垂直な面を通し、単位時間・体積あたりに流入する正味の質量は、 $-\partial(\rho u) / \partial x$ となる。これは、単位体積あたりの質量 (密度) の局所的な時間変化率の x 方向の寄与を表している。残りの 2 方向についても同様に考えれば、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (1.3.6)$$

を得る。この式は、連続の式 (continuity equation) と呼ばれる。 $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla$ 、 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho$ の関係を使って (1.3.6) を書き換えれば、次のようにラグランジュ的に記述することもできる。

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (1.3.7)$$

1.4 状態方程式

3 つの熱力学変数 p, α, T は独立でない。あらゆる物質に対して、状態方程式

$$f(p, \alpha, T) = 0 \quad (1.4.8)$$

の関係が存在する。実際の物質ではこの関係はとても複雑であり、簡潔な解析的な表現式は存在しない。しかしながら、変数の制限的な範囲においては満たされるような解析的な形式が存在する。一般的な方程式は、特定の理想化された条件を仮定することによって導かれる。例えば、理想気体(ideal gas)は、ボイルの法則とシャルルの法則に従う気体として定義される。この場合、 n モルの理想気体に対する状態方程式は

$$pV = nR^*T \quad (1.4.9)$$

の形式を持つ。ここで、 $R^*(= 8.31447 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1})$ は普遍気体定数である。理想気体は実在しないが、(1.4.9)は多くのプロセスで実際の気体を近似するのに使われ、気象力学の目的においては十分である。

実際の大気は混合気体であり、例えば地球の乾燥大気は窒素・酸素・アルゴン・二酸化炭素などの混合気体である。それぞれの気体を理想気体とみなせば、乾燥大気の圧力 p は各成分気体の分圧 p_k の和に等しい。すなわち、

$$p = \sum_k p_k$$

混合気体の体積を V 、成分 k の気体の質量を M_k 、その気体の分子量を m_k とすれば、各成分気体に対して

$$p_k = \frac{M_k}{m_k V} R^* T$$

が成り立つ。よって、

$$p = \frac{R^* T}{V} \sum \frac{M_k}{m_k} = R^* T \left(\frac{\sum M_k}{V} \right) \frac{\sum \frac{M_k}{m_k}}{\sum M_k}$$

と書ける。平均分子量 $\bar{m} = \sum M_k / \sum M_k / m_k$ と比容 $\alpha = V / \sum M_k$ を導入すれば、乾燥大気に対する状態方程式

$$p\alpha = RT \quad (1.4.10)$$

を得る。ここで、 $R = R^* / \bar{m}$ は乾燥大気に対する気体定数である。地球の場合、 $\bar{m} = 28.97 \text{ g mol}^{-1}$ であり、それに対応する乾燥大気の気体定数は $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ である。

1.5 熱力学第一法則

熱力学第一法則は、エネルギーの保存則を表現する。後者は、系のエネルギーの変化は系の境界を横切る正味のエネルギー輸送と等しいことを述べている。より一

一般的には、この原理は全ての種類のエネルギーを包含する。このエネルギーの種類
の例としては、ポテンシャルエネルギー・運動エネルギー・熱エネルギー・放射エ
ネルギー・磁場エネルギー・電気エネルギー・化学エネルギーなどである。しかし
ながら、気象学における熱力学の適用において上の関係は大変簡素化される。後に
示されるように、ニュートンの運動法則は力学的エネルギーの特定の形式のバラ
ンスを示唆する。結果として、生成される運動エネルギーと重力場によるポテンシ
ャルエネルギーの和の変化は、圧力や摩擦によってなされる仕事の一部分に等しい。
よって、これらの特定の項は、熱力学第一法則から除外されるだろう。圧力や摩擦
によって気体になされる仕事の残りの部分は気体の膨張や変形によるものである。

化学反応・電磁気の効果を考えないのならば、熱力学第一法則は次のような簡潔
な形式で書ける。

$$Q = \frac{dI}{dt} + W$$

ここで、 Q は加えられた熱エネルギーの単位質量・時間あたりの割合、 W は気体
の膨張によって周囲の気体になす仕事率、 dI/dt は内部エネルギーの時間的な変化
率である。理想気体では、単位質量あたりの内部エネルギーの変化率は $c_v dT/dt$ に
よって与えられる。ここで、 c_v は定積比熱である。一方、非粘性な気体の可逆的な
膨張によって単位時間・単位質量あたりになされる仕事は $p d\alpha/dt$ である。これら
の表現を、熱力学方程式に代入すれば、

$$Q = c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} \quad (1.5.11)$$

を得る。

(1.5.11) は、断熱過程での保存量を導入することでより簡潔に書ける。断熱過程
では、(1.5.11) は

$$0 = c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt}$$

となる。さらに理想気体に対する状態方程式 (1.4.10) を使って、 α を消去し整理す
れば

$$0 = c_p \frac{d \ln T}{dt} - R \frac{d \ln p}{dt}$$

を得る。ただし、ここでマイヤーの関係式 $c_p = c_v + R$ を用いた。これを積分すれば、

$$T = C p^{R/c_p}. \quad (1.5.12)$$

ここで C は各流体要素によって決まる定数である。とくに気圧が p_0 のときの温度
を θ として、定数 C を消去すれば

$$\theta = T(p_0/p)^\kappa, \quad \kappa = R/c_p \quad (1.5.13)$$

となる。なお、この標準気圧 p_0 として地上気圧である 1000hPa をとることが多い。この θ は温位(potential temperature)と呼ばれる。ここで導入した θ を使って、(1.5.11) を書き直せば、

$$\frac{d(\ln\theta)}{dt} = \frac{Q}{c_p T} \quad (1.5.14)$$

となる。(1.5.14)において断熱過程 ($Q = 0$) を考えるとき $d\theta/dt = 0$ となることから、断熱過程において温位 θ はラグランジュ保存量となることに注意されたい。

水物質の相変化が存在するとき、(1.5.11) は次のような形式をとる。

$$Q - L \frac{dq}{dt} - c_l l \frac{dT}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} \quad (1.5.15)$$

ここで、 q は水蒸気成分の比湿、 l は単位質量の空気に含まれる液体の水の質量、 L は潜熱、 c_l は液体の水の比熱である。今、 Q は潜熱以外の非断熱加熱の形式を表現している。

1.6 乾燥大気の運動を記述する方程式系

乾燥大気に対して、運動方程式 (1.2.5)、連続の式 (1.3.6)、状態方程式 (1.4.10)、熱力学第一法則 (1.5.11) は、6本のスカラー方程式と6つの未知数 p, α, T, u, v, w の完全系を構成する。摩擦力 F と非断熱加熱 Q は、既知の関数あるいは他の変数を使って表現できると仮定される。したがって原理的には、未来の状態はこの方程式系の解によって決定される。

湿潤大気では状態方程式と熱力学第一法則の式を修正し、さらに水物質の保存を表現する方程式を加える必要がある。ひとまず、ここでは乾燥大気のみを考えることにしよう。

大気の大規模な運動に対しては、静水圧平衡を仮定することができる。つまり、鉛直方向の加速度はコリオリ力の鉛直成分とともに無視されるだろう。静水圧平衡近似が有効であるとき、運動方程式 (1.2.5) は水平方向と鉛直方向に対してそれぞれ次のように書ける。

$$\frac{d\mathbf{V}_H}{dt} = -\alpha \nabla p - \mathbf{f} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}_H \quad (1.6.16)$$

$$0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.6.17)$$

ここで、 V_H は水平速度ベクトル、 ∇ は2次元の微分演算子、 F_H は摩擦力の水平方向成分である。また $f = f\mathbf{k}$ であり、 $f(= 2\Omega \sin \phi)$ はコリオリパラメータ(惑星渦度の鉛直成分)である。

1.7 球座標系における運動方程式

運動方程式のベクトル表記は簡潔であり、様々な項の物理的な理解を得るには便利である。しかしながら、数値予報などの現実的な問題への応用には座標系を導入した記述が必要となる。大気の大規模な運動は地球表面に対してごく水平的であるので、球座標系を用いるのが便利である。運動方程式 (1.2.5) を球座標に変換する際には、直交曲線座標系において一般化された微分演算子の公式を用いると便利である^{*1}。

直交曲線座標系での座標 (q_1, q_2, q_3) をそれぞれ $q_1 = \lambda, q_2 = \phi, q_3 = r = z + a$ に対応させよう。ここで、 λ, ϕ, r, a, z はそれぞれ経度・緯度・地球の中心から放射方向の距離・地球の平均半径・平均海面からの高度である。各座標軸方向の曲線線素 ds_i と対応するスケール因子 h_i は次のようになる。

$$\begin{aligned} ds_1 &= r \cos \phi d\lambda, & ds_2 &= r d\phi, & ds_3 &= dr. \\ h_1 &= r \cos \phi, & h_2 &= r, & h_3 &= 1. \end{aligned} \quad (1.7.18)$$

ここで、極座標の各方向の正規直交基底を $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ とすると、速度ベクトル $\mathbf{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ の各方向成分は次のように定義される。

$$u = \frac{ds_1}{dt} = r \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = \frac{ds_2}{dt} = r \frac{d\phi}{dt}, \quad w = \frac{ds_3}{dt} = \frac{dr}{dt} = \frac{dz}{dt}. \quad (1.7.19)$$

直交曲線座標系で一般化された全微分の公式^{*2}に上のスケール因子を代入して計算すれば、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \left(-\frac{uv}{r} \tan \phi + \frac{uw}{r} \right) \hat{i} \\ &\quad + \left(\frac{u^2}{r} \tan \phi + \frac{uw}{r} \right) \hat{j} + \left(-\frac{u^2 + v^2}{r} \right) \hat{k}. \end{aligned}$$

^{*1}直交直交座標や直交曲線座標系で一般化された微分演算子の公式については、物理数学補足ノートの「直交曲線座標」を参照。

^{*2}

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum_i \left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla V_i \right) + \sum_l \left(\frac{V_i V_l}{h_i h_l} \frac{\partial h_i}{\partial q_l} - \frac{V_l V_i}{h_l h_i} \frac{\partial h_l}{\partial q_i} \right) \right] \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (1.7.20)$$

上の式の大括弧内の l についての総和は、 $l = i$ の際にはゼロとなることに注意されたい。

一方, コリオリ力の項は

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} &= 2\Omega(\hat{\mathbf{j}} \cos \phi + \hat{\mathbf{k}} \sin \phi) \times (u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}) \\ &= (2\Omega \cos \phi w - fv)\hat{\mathbf{i}} + fu\hat{\mathbf{j}} - 2\Omega \cos \phi u\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

と計算される. したがって, 極座標系における各方向ごとの運動方程式 (1.2.5) は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \phi}\right)(v \sin \phi - w \cos \phi) + F_\lambda, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \phi}\right)u \sin \phi - \frac{vw}{r} + F_\phi, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \phi}\right)u \cos \phi + \frac{v^2}{r} + F_z. \end{aligned} \quad (1.7.21)$$

ただし, 上の式での全微分の記号は任意のスカラー関数 f に対して

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

である. また, (x, y, z) は局所直交座標であり, それぞれ東西方向, 南北方向, 局所的な鉛直方向に対する座標である. 上で示した方程式は地球が楕円体であることを無視しているため正確ではないが, 角運動量は保存する (Phillips, 1966). すなわち,

$$\frac{d}{dt}[r \cos \phi (u + \Omega r \cos \phi)] = r \cos \phi F_\lambda^* \quad (1.7.22)$$

が導かれる^{*3}. ここで, F_λ^* は経度方向の気圧傾度力と摩擦力を表している.

地球を覆う大気は相対的に薄い層であるので, 半径 r は小さな誤差で海面までの平均半径 a に置き換えることができるだろう. しかしながら, 角運動量の保存を維持するために, (1.7.21) の右辺において w を含む項は除外されなければならない. その場合の角運動量保存則 (1.7.22) は, その式において r を a に置きかれば良い. 加えて鉛直方向の運動方程式中のいくつかの項は, (1.6.16) とのベクトルの形式の一貫性を保つために除外される.^{*4} 結果的に (1.7.21) の近似式は次のようになる.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(f + \frac{u \tan \phi}{a}\right)v + F_\lambda, \quad (1.7.23)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \left(f + \frac{u \tan \phi}{a}\right)u + F_\phi, \quad (1.7.24)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z. \quad (1.7.25)$$

^{*3}(1.7.21) の経度方向の方程式の両辺に, $r \cos \phi$ をかけて整理することで得られる.

^{*4}(1.7.21) の右辺において w を含む項を除去したために, このままでは運動エネルギーの保存が維持されない. これが維持されるように, w に比例する項である $2\Omega w \cos \phi$, $-uw/r$, $-vw/r$ の消去に伴い, それぞれ $2\Omega u \cos \phi$, u^2/r , v^2/r の項を消去する.

ここで、地球の渦度の鉛直成分 $f = 2\Omega \sin \phi$ はコリオリパラメータと呼ばれる。この方程式系において角運動量保存則 (1.7.22) は満たされるために、一貫性のある近似といえる。

擾乱の鉛直方向のスケールが水平方向のスケールに比べてはるかに小さいとき、鉛直加速度 dw/dt は無視しても良いだろう。このとき、摩擦を無視した (1.7.24) は静水圧平衡の式

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.7.26)$$

となる。

なお、連続の式や熱力学方程式 (1.5.14) にはスカラーの全微分が含まれるが、スカラーの全微分は球座標系において次のように展開される。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

1.8 鉛直座標変換

幾何的な高度 z (または放射方向の距離 r) は多くの目的において最も便利な鉛直座標とは限らない。気象力学の応用で使われる他の鉛直座標には、圧力座標 p 、対数圧力座標 $\ln(p/p_0)$ 、地表面圧力で正規化した圧力座標であるシグマ座標 $\sigma = p/p_s$ 、温位座標 θ である。

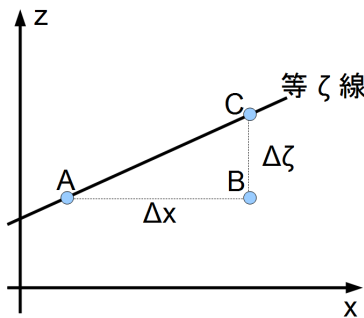


図 1.8.1: 関数 \mathcal{A} の空間的な変化を考える。

一般化された鉛直座標 ζ を考えよう。 ζ は一価の単調関数によって幾何的な高度 z と関係づけられるとする。 z 座標系を使うとき ζ は (x, y, z, t) の関数であり、一方鉛直座標として ζ を使うときは z は (x, y, ζ, t) の関数である。任意のスカラー (またはベクトル) の依存変数 \mathcal{A} は、他の座標系を用いるとき $\mathcal{A}(x, y, z, t)$ あるいは $\mathcal{A}(x, y, \zeta, t)$ のように表されるだろう。スカラー \mathcal{A} は座標系の取り替えによっては不変であるので、

$$\mathcal{A}(x, y, \zeta, t) \equiv \mathcal{A}(x, y, z(x, y, \zeta, t), t)$$

である。図 1.8.1 のように xz 平面上に 3 点 A, B, C をとり、等 ζ 面上における \mathcal{A} の水平微分が、等 ζ 面上の水平微分とどのような関係を持つかを求める。点 A, B を含む等 ζ 面上における点 A での x 方向の水平微分を、図を参考にして有限差分近似で表し、またそれを変形すると、

$$\frac{\mathcal{A}(B) - \mathcal{A}(A)}{\Delta x} = \frac{\mathcal{A}(C) - \mathcal{A}(A)}{\Delta x} - \frac{\mathcal{A}(C) - \mathcal{A}(B)}{\Delta \zeta} \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad (1.8.27)$$

となる。ここで、 $\mathcal{A}(A)$ のように書かれている量は、点 A における \mathcal{A} の値を表している。

(1.8.27) において、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすれば、

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right)_\zeta - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

を得る。同様の議論は x を y や t に変えても行えるので、 $s = x, y, t$ として上の式は次のように書ける。(以後、 \mathcal{A} を A と書くことにする。)

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_\zeta = \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_z + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)_\zeta \quad (1.8.28)$$

鉛直方向の微分には次のように関係がある.

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} = \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (1.8.29)$$

(1.8.29) を (1.8.28) に代入すれば,

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_{\zeta} = \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)_{\zeta} \quad (1.8.30)$$

を得る. 上の式を $s = x, y$ として使えば, A の水平勾配およびベクトル B の 2 次元の発散の z 座標系と ζ 座標系での関係式を得る.

$$\nabla_{\zeta} A = \nabla_z A + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \nabla_{\zeta} z, \quad (1.8.31)$$

$$\nabla_{\zeta} \cdot \mathbf{B} = \nabla_z \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cdot \nabla_{\zeta} z. \quad (1.8.32)$$

$s = t$ とすれば,

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\zeta} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\zeta} \quad (1.8.33)$$

である. また, ζ 座標系における全微分は,

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\zeta} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\zeta} A + \zeta \frac{\partial A}{\partial \zeta} \quad (1.8.34)$$

と書ける. ここで, \mathbf{V} は水平速度ベクトル, $\zeta = d\zeta/dt$ は ζ 系における鉛直速度である. A はスカラーであるが, ベクトルとして取り扱う場合にはメトリック項に注意を払わなければならない.

上で得た鉛直座標変換の関係は, 方程式を z 系から ζ 系へと変換するために使われるだろう. (1.8.31) を使って, 水平方向の気圧傾度力は次のように変換される.

$$-\alpha \nabla_z p = -\alpha \nabla_{\zeta} p + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_{\zeta} z = -\alpha \nabla_{\zeta} p - \nabla_{\zeta} \Phi \quad (1.8.35)$$

ここで, $\Phi = gz$ はジオポテンシャルである. したがって, ζ 座標系における水平方向の運動方程式は,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\alpha \nabla_{\zeta} p - \nabla_{\zeta} \Phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{V}. \quad (1.8.36)$$

(1.8.29) を使えば, 静水圧平衡の式は, 次のように変換される.

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + g = 0 \quad \text{or} \quad \alpha \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0. \quad (1.8.37)$$

次に z 系における連続の式

$$\frac{d(\ln\rho)}{dt} + \nabla_z \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.8.38)$$

を ζ 座標系へと変換することを考える. (1.8.29) と (1.8.32) を使えば, 発散項は

$$\nabla_z \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_\zeta \cdot \mathbf{V} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \zeta} \cdot \nabla_\zeta z + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (1.8.39)$$

と計算される. さらに,

$$w = \dot{z} = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_\zeta + \mathbf{V} \cdot \nabla_\zeta z + \dot{\zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

より,

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla_\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \zeta} \cdot \nabla_\zeta z + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)$$

である. これを (1.8.39) に代入すれば,

$$\nabla_z \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_\zeta \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_\zeta + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta}$$

この結果を (1.8.38) に代入し整理すれば, 次のような ζ 座標系における連続の式が得られる.

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \left| \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right| \right) + \nabla_\zeta \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.8.40)$$

熱力学方程式は温位 θ の全微分で表現されるので, 見た目上は z 系の式と変わらない. すなわち,

$$c_p T \frac{d \ln \theta}{dt} = Q \quad (1.8.41)$$

あるいは,

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \quad (1.8.42)$$

である.

次は上の一般化された鉛直座標変換で得られた式を, 具体的に ζ を指定した場合に適用してみることを考えることにする.

1.8.1 圧力座標系

$\zeta = p$ のとき, $\nabla_{\zeta} p = \nabla_p p \equiv 0$, $\partial p / \partial p = 1$ となる. よって, 運動方程式 (1.8.36), 静水圧平衡の式 (1.8.37) は次のようになる.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla_p \Phi - f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad (1.8.43)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha \quad (1.8.44)$$

連続の式 (1.8.40) は, $\zeta = p$ としたとき次のようになる.

$$\nabla_p \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (1.8.45)$$

ここで, $\omega = dp/dt = \dot{p}$ は p 系における鉛直速度である. p 系における連続の式は線形となることに注意されたい. この方程式を $\omega = 0$ である $p = 0$ から任意の高度 p まで積分すれば, ω に対する方程式

$$\omega = - \int_0^p \nabla_p \cdot \mathbf{V} dp \quad (1.8.46)$$

を得る. ただし, 大気上端 $p = 0$ において $\omega = 0$ であると仮定した. 地表の運動の境界条件として, 地表に対して法線方向のフラックスはゼロだと仮定すれば,

$$\omega_s = \frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \mathbf{V}_s \cdot \nabla p_s. \quad (1.8.47)$$

(1.8.46) の積分を $p_s(x, y, t)$ までの行えば, 地表気圧の時間変化に対する方程式

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \mathbf{V}_s \cdot \nabla p_s = - \int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \mathbf{V} dp \quad (1.8.48)$$

を得る. 最後に, 熱力学方程式の dp/dt は ω によって置き換えられるが他は変化しない.

z 系の代わりに p 系を使う明白な利点は, 連続の式 (1.8.45) は線形となり, また (1.8.43) の圧力傾度力の項も線形となることである. 密度が消えるために, p 系における地衡風の関係式や温度風の関係式はそれぞれ次のように簡単になる.

$$\mathbf{V}_g = -\frac{1}{f}\mathbf{k} \times \nabla \Phi, \quad \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial p} = -\frac{1}{f}\mathbf{k} \times \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

1.8.2 σ 座標系

σ 座標系は圧力座標系を地上気圧 $p_s = p_s(x, y, t)$ で規格化したものである。すなわち、

$$\sigma = p/p_s.$$

このとき、圧力勾配力の項は次のように変換される。

$$-\alpha \nabla_z p = -\alpha \nabla_\sigma p + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_\sigma z = -\alpha \nabla_\sigma(\sigma p_s) - \nabla_\sigma \Phi$$

$\alpha \nabla_\sigma(\sigma p_s) = \alpha \sigma \nabla p_s$ となるので、結果的に σ 系における運動方程式 (1.8.36) は、

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_\sigma \mathbf{V} + \dot{\sigma} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma} = -\nabla_\sigma \phi - \frac{RT}{p_s} \nabla p_s - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad (1.8.49)$$

となる。

静水圧平衡の式 (1.8.37) は、 $\partial p / \partial \sigma = \partial(\sigma p_s) / \partial \sigma = p_s$ であることを用いれば、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \alpha p_s = 0 \quad (1.8.50)$$

となる。

次に、連続の式 (1.8.40) の第1項は $d(\ln \partial p / \partial \sigma) / dt$ となり、 $\partial p / \partial \sigma = p_s$ であるので、 σ 系における連続の式は次のようになる。

$$\frac{d(\ln p_s)}{dt} + \nabla_\sigma \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \quad (1.8.51)$$

σ 系における連続の式の別の形式は、第1項 \dot{p}_s / p_s を展開することによって得られる。

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p_s + \dot{\sigma} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} + p_s \nabla_\sigma \cdot \mathbf{V} + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0$$

ここで、 p_s が σ に依存しないことを用いれば上の式は次のようになる。

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\nabla_\sigma \cdot (p_s \mathbf{V}) - \frac{\partial(p_s \dot{\sigma})}{\partial \sigma} \quad (1.8.52)$$

鉛直速度 $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$ の境界条件は、地表 $\sigma = p_s/p_s = 1$ と大気上端 $\sigma = 0/p_s = 0$ において $\dot{\sigma} = 0$ である。これらの境界条件を使って、(1.8.52) を大気上端から下端まで積分すれば、

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^1 \nabla \cdot (p_s \mathbf{V}) d\sigma \quad (1.8.53)$$

を得る。これは、地表面気圧の時間変化に対する方程式である。代わりに大気上端 $\sigma = 0$ から任意の高度 σ まで積分すれば、今度は σ における鉛直速度 $\dot{\sigma}$ を与える次の方程式を得る。

$$\sigma \frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_0^\sigma \nabla \cdot (p_s \mathbf{V}) d\sigma = -p_s \dot{\sigma} \quad (1.8.54)$$

$\partial p_s / \partial t$ の値が (1.8.53) から得られれば、(1.8.54) を用いて $\dot{\sigma}$ を計算することができる。さらにこの $\dot{\sigma}$ を使って、運動方程式 (1.8.49) の鉛直移流項 $\dot{\sigma} \partial \mathbf{V} / \partial \sigma$ や熱力学方程式の同様の項を評価することができる。これらのステップは、 σ 系を用いる数値予報モデルにおいて V, T などの局所時間変化を決定するための方法の一部分である。

地表において $\dot{\sigma} = 0$ である理由は、 $\sigma = 1$ で流れが地表に沿う（地表に対して法線成分はゼロ）ためである。この簡単化された下部の境界条件が p 系に比べて σ 系を用いることの利点となる。例えば、地表面気圧の時間変化を計算する式は σ 系において (1.8.53) のような簡潔な形式をとる。

1.8.3 θ 座標系

等エントロピー面またはそれと等価な等温位面は、1930-1940 年代に鉛直座標としてよく用いられた。その後長らくあまり用いられなくなったが、1970 年代中期には θ 系は少しだけ再起した。 θ 系の魅力的な性質は、乾燥断熱な運動に対してはそれぞれの流体要素はその温位を保存し、等エントロピー面は物質面となるところである。ただし、この性質は非断熱な条件には当てはまらない。しかしながら、この座標系は他にも魅力的な性質があり、断熱的な運動の研究に制限されない。例えば、 θ 系は前線周辺ではより良い分解能を与える。

再び水平圧力勾配項を θ 系に変換すれば、

$$-\alpha \nabla_z p = -\alpha \nabla_\theta p + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_\theta z = -\alpha \nabla_\theta p - \nabla_\theta \Phi \quad (1.8.55)$$

ここで、温位の定義より

$$0 = \nabla_\theta \ln \theta = \nabla_\theta \ln T - \frac{R}{c_p} \nabla_\theta \ln p$$

であるので、 $-\nabla_\theta p = -(pc_p/RT) \nabla_\theta T$ を得る。これを用いれば、(1.8.55) は

$$-\alpha \nabla_z p = \nabla_\theta (c_p T) - \nabla_\theta \Phi$$

となる。したがって、 θ 系の水平方向の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_\theta \mathbf{V} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta} = -\nabla_\theta (c_p T + \Phi) - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} \quad (1.8.56)$$

ここで, $c_p T + \Phi = M$ という量はモントゴメリー流線関数(Montgomery stream-function)と呼ばれる.

θ 系における静水圧平衡の式の形式は, 温位の定義を用いることで得られる. 温位の定義の対数微分をとれば,

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{R}{p c_p} \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

ここで z 系の静水圧平衡の式を使えば,

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

となる. これを代入すれば θ 系における静水圧平衡の式

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (c_p T + \Phi) = \frac{c_p T}{\theta} \tag{1.8.57}$$

を得る.

次に θ 系における連続の式 (1.8.40) は,

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nabla_{\theta} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0 \tag{1.8.58}$$

となる. これも σ 系と同様に d/dt を展開し θ について積分を行うことで, 地表面気圧の時間変化 $\partial p_s / \partial t$ に対する方程式得ることができる.

熱力学方程式 (1.8.41) については変更を加える必要はない. $\dot{\theta}$ の境界条件は, 大気上端 $\theta = \theta_{top}$ にて $\dot{\theta} = 0$, 大気下端 $\theta = \theta_s$ にて

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \mathbf{V}_s \cdot \nabla \theta_s$$

となる.

1.9 エネルギーの関係式

大気現象の力学的な解析において、さまざまな擾乱のエネルギーの研究は極めて重要である。数値予報においてもまたエネルギーの関係を議論することは重要である。エネルギー変換の診断や数値モデルのエネルギー保存の特性は、偏微分方程式のスキームの設計、物理過程の表現、誤差の成因の特定のための重要な道具となる。

1.9.1 運動エネルギー

単位質量あたりの運動エネルギーを含む方程式は、運動方程式の \mathbf{V} によるスカラー積をとることで速やかに得られる。例えば、圧力座標系の形式では、

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_p K + \omega \frac{\partial K}{\partial p} = -\mathbf{V} \cdot \nabla_p \Phi + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \quad (1.9.59)$$

となる。ここで、 $K = V^2/2$ 、 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}$ は摩擦による散逸を表す。この方程式のフラックスフォームは、次のように得られる。最初に連続の式^{*5}に K を掛けて、(1.9.59) に加えれば

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla_p \cdot (K\mathbf{V}) + \frac{\partial(K\omega)}{\partial p} = -\nabla_p \cdot (\Phi\mathbf{V}) + \Phi \nabla_p \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (1.9.60)$$

また、連続の式を用いることで上の式の第3項は、

$$\Phi \nabla_p \cdot \mathbf{V} = -\Phi \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{\partial(\omega\Phi)}{\partial p} + \omega \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

となる。最後に、 $\partial\phi/\partial p = -\alpha = -RT/p$ を用いれば、運動エネルギーに関する方程式のフラックスフォームを得る。

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla_p \cdot [(K + \Phi)\mathbf{V}] + \frac{\partial[(K + \Phi)\omega]}{\partial p} = -\frac{RT}{p}\omega + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \quad (1.9.61)$$

左辺の第1項と第2項はフラックスの発散項である。一方、右辺の第1項と第2項は運動エネルギーのシンク項やソース項となる。

^{*5} p 系における連続の式は、

$$\nabla_p \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

1.9.2 ポテンシャルエネルギー

地表から大気上端まで延びる流体コラムを考える。単位面積あたりの流体コラムがもつ重力によるポテンシャルエネルギー P は、次の積分によって計算される。

$$P = \int_0^\infty gz\rho dz = \int_0^{p_s} \Phi \frac{dp}{g} = \left[\frac{\Phi p}{g} \right]_0^{p_s} - \frac{1}{g} \int_0^{p_s} p \frac{\partial \Phi}{\partial p} dp$$

となる。ここで、 g の鉛直方向の変化を無視し、また部分積分を実行した。最後に静水圧平衡の式を上の式に適用すれば、

$$P = \frac{\Phi_s p_s}{g} + \frac{1}{g} \int_0^{p_s} RT dp \quad (1.9.62)$$

を得る。

同じ流体コラムがもつ単位面積あたりの内部エネルギー (internal energy) I は、

$$I = \int_0^\infty c_v T \rho dz = \int_0^{p_s} \frac{c_v T dp}{g} \quad (1.9.63)$$

マイヤーの関係式 $c_v + R = c_p$ を用いて、内部エネルギー I と重力によるポテンシャルエネルギー P を結合することができる。この $I + P$ は全ポテンシャルエネルギー (total potential energy) と呼ばれ、次のように書ける。

$$P + I = g^{-1} \int_0^{p_s} E dp + g^{-1} \Phi_s p_s \quad (1.9.64)$$

ここで、 $E = c_p T$ はエンタルピー (enthalpy) である。

この結果が示すことは、大気のコラムがもつ全ポテンシャルエネルギーは、エンタルピーの積分と海面からの地表面高度に比例する項の和に比例する。よって、全ポテンシャルエネルギーに対する方程式を得るために、熱力学方程式 (1.8.42) は次のように用いられる。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_p E + \omega \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{RT}{p} \omega + Q \quad (1.9.65)$$

次に p 系における連続の式に E を掛け、(1.9.65) を加えて整理すれば、次のような上の式のフラクックスフォームを得る。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_p \cdot (E\mathbf{V}) + \omega \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{RT}{p} \omega + Q \quad (1.9.66)$$

(1.9.61) と (1.9.66) を見比べれば, $RT\omega/p$ という項が両方の方程式に反符号で存在することが分かる. この項によってポテンシャルエネルギーが局所的に増加するとき, 運動エネルギーは減少する. またその逆も言える. 閉じた領域におけるこの項の積分は, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの間の変換を表現する. この変換関数は, 次のような $K + E$ の局所変化に対する方程式を得るために (1.9.61) と (1.9.66) が加えられるとき, 消去される.

$$\frac{\partial(K + E)}{\partial t} + \nabla_p \cdot [(K + E + \Phi)\mathbf{V}] + \frac{\partial}{\partial p} [(K + E + \Phi)\omega] = Q + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \quad (1.9.67)$$

次に, 大気全体の質量に渡ってこの方程式を積分する. このとき微小体積の質量は $\rho dx dy dz = -dx dy dp/g$ であるので,

$$\begin{aligned} & \iint \int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial t} (K + E) dp dx dy + \iint \int_0^{p_s} \nabla \cdot [(K + E + \Phi)\mathbf{V}] dp dx dy \\ & + \iint [(K + E + \Phi)\omega]_s dx dy = \bar{Q} + \overline{\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (1.9.68)$$

ここで,

$$(\bar{\quad}) = \iiint (\quad) \rho dx dy dz = \iint \int_0^{p_s} (\quad) dx dy dp.$$

\bar{Q} の項は加えられる熱または大気によって宇宙へと逃される熱の合計を, $\overline{\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}}$ の項は潜在的な地表面による散逸と摩擦による散逸の合計を表す. また左辺の3番目の項の鉛直方向の積分を実行した. 次に, 微分演算子 $\partial/\partial t$ と $\nabla \cdot$ をライプニッツの積分則^{*6}を使って p に対する積分の外に出すことを考える. このとき変数の上限 p_s に注意すれば,

$$\begin{aligned} & \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_s} (K + E) dp - \frac{\partial p_s}{\partial t} (K + E)_s + \nabla \cdot \int_0^{p_s} [(K + E + \Phi)\mathbf{V}] dp \right. \\ & \left. - \nabla p_s \cdot [(K + E + \Phi)\mathbf{V}]_s + [(K + E + \Phi)\omega]_s \right\} dx dy = \bar{Q} + \overline{\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (1.9.69)$$

となる.

今, $\frac{\partial}{\partial t}$ を水平方向の積分の外に出すことができる. また, 側面境界は球面の地球には存在しないので (等圧力面と交差する山岳は除く), 水平フラクスの発散を含む第3項はガウスの発散定理によって消去される. したがって, 残される項は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{K} + \bar{E}) - g^{-1} \iint \left\{ \frac{\partial p_s}{\partial t} (K + E)_s + \nabla p_s \cdot [(K + E + \Phi)\mathbf{V}]_s \right. \\ & \left. - [(K + E + \Phi)_s \omega_s] \right\} dx dy = \bar{Q} + \overline{\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (1.9.70)$$

^{*6}関数 $f(x, \alpha)$ の $a(\alpha)$ から $b(\alpha)$ までの x 積分が, パラメータ α の関数となるとき,

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \frac{db(\alpha)}{d\alpha} f(b(\alpha), \alpha) - \frac{da(\alpha)}{d\alpha} f(a(\alpha), \alpha) + \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx$$

となる。地表の境界条件 (1.8.47) によれば, $\partial p_s / \partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla p_s = \omega_s$ であるので, $(K + E)_s$ を含む項はキャンセルされる。他方, $\Phi_s(\omega_s - \mathbf{V} \cdot \nabla p_s)$ は $\Phi_s \partial p_s / \partial t$ によって置き換えることができる。よって, 全エネルギーに対する方程式 (1.9.70) は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} [\overline{K} + \overline{E} + \frac{1}{g} \overline{\Phi_s p_s}] = \overline{Q} + \overline{\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}} \quad (1.9.71)$$

ここで, $\overline{\Phi_s p_s}$ のみ地表面の 2 次元の積分である。(1.9.71) の左辺は全運動エネルギーと (1.9.64) によって定義される全ポテンシャルエネルギーの和の時間変化率 (実際には全微分 d/dt) である。一方, 右辺は系に加えられる全エネルギーと運動エネルギーの摩擦による散逸を表す。断熱および摩擦なしの条件下では (1.9.71) の右辺はゼロとなり, 全エネルギーは保存する。

1.10 有効位置エネルギー

自然界でよく見られるように, ある種のポテンシャルエネルギーの単なる存在が, 他の形式へのエネルギー変換の有効性を保証するわけではない。大気のプロセスにおいてこの状況を明確にするために, Lorenz(1955) は有効位置エネルギー (available potential energy (APE)) と呼ばれる量を定義した。この量は, ある時刻の大気的全ポテンシャルエネルギーと p, T 面が一致する (故に θ 面も一致する) ような安定成層の温度場に断熱的に再配置することによって得られる仮想的な状態における全ポテンシャルエネルギーとの差を示す量である。(1.9.61) によれば, 閉領域全体に渡る運動エネルギーへのポテンシャルエネルギーの変換の割合は, $-(R/g) \iiint (T\omega/p) dx dy dp$ によって与えられる。これは, 等圧面上の T と ω の共分散 $\overline{T\omega} (= \overline{T'\omega'} + \overline{\bar{T}\bar{\omega}})$ の鉛直方向の積分に比例する。後ほど示すように $\bar{\omega} = 0$ であるので, 共分散は $\overline{T\omega} = \overline{T'\omega'}$ となる。Lorenz の大気の仮想的な状態において温度は等圧面上で一定であるので, $\overline{\bar{T}\bar{\omega}} = 0$ となる。次に, 連続の式 (1.8.45) を鉛直方向に積分すれば,

$$\bar{\omega} \iint dx dy = \iint \omega dx dy = - \iint \int_0^p \nabla_p \cdot \mathbf{V} dx dy dp \quad (1.10.72)$$

を得る。ここで, もし地表が閉じているまたは境界上で境界に対する速度の法線成分がゼロであるならば, ガウスの発散定理を適用することで上の式はゼロとなる。したがって, 閉じた等圧面にわたって $\iint \nabla_p \cdot \mathbf{V} dx dy = 0$ であり $\bar{\omega} = 0$ となる。このことは, 仮想的に断熱的に再配置された大気の状態において $\overline{T\omega} = \overline{T'\omega'} = 0$ であり, ポテンシャルエネルギーから運動エネルギーの変換がそれ以上起こり得ないことを導く。

有効位置エネルギー A の数学的な表現を得ることを考えよう。簡単化のために地形は無視し $p_s = 1000\text{hPa}$ とする。また, 温位 $\theta = T(p_s/p)^\kappa$ を導入する。このと

き, 全ポテンシャルエネルギー (1.9.64) は

$$TPE = \frac{c_p}{g} \int_0^{p_s} T dp + \frac{\Phi_s p_s}{g} = c_p g^{-1} p_s^{-\kappa} \int_0^{p_s} \theta p^\kappa dp + \frac{\Phi_s p_s}{g}$$

となる. ここで, $\kappa = R/c_p$ である. 続いて, 部分積分を行えば

$$TPE = \frac{c_p p_s^{-\kappa}}{g(1+\kappa)} \left\{ [\theta p^{1+\kappa}]_0^{p_s} + \int_{\theta_s}^{\theta_T} p^{1+\kappa} d\theta \right\} + \frac{\Phi_s p_s}{g}$$

を得る. 定数項を無視し, 大気的全ポテンシャルエネルギーの面積平均を $\bar{\quad}$ を使って表せば,

$$\overline{TPE} = \frac{c_p p_s^{-\kappa}}{g(1+\kappa)} \int \overline{p^{1+\kappa}} d\theta \quad (1.10.73)$$

ここでは, 鉛直座標に温位を用いている. 今大気が等温位面上の圧力が初期の圧力分布の平均 \bar{p} と等しくなるような Lorenz の仮想的な状態に再配置されたならば, 領域の APE は (1.10.73) とこの仮想的な状態の TPE との差となるだろう. すなわち,

$$\bar{A} = \frac{c_p p_s^{-\kappa}}{g(1+\kappa)} \int \overline{p^{1+\kappa} - \bar{p}^{1+\kappa}} d\theta. \quad (1.10.74)$$

これをより使いやすい形式にするために, $p = \bar{p} + p'$ として $p^{1+\kappa}$ を級数展開すれば

$$p^{1+\kappa} = (\bar{p} + p')^{1+\kappa} = \bar{p}^{1+\kappa} + (1+\kappa)\bar{p}^\kappa p' + \frac{\kappa(1+\kappa)\bar{p}^{\kappa-1} p'^2}{2!} + \dots$$

となる. 上の式を面積平均すれば右辺の真ん中の項は消える. この結果を (1.10.74) に代入すれば,

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \kappa c_p g^{-1} p_s^{-\kappa} \int_{\theta_s}^{\theta_T} \overline{p^{1+\kappa} (\overline{p'/\bar{p}})^2} d\theta. \quad (1.10.75)$$

したがって, 領域の APE は等温位面上の圧力の分散に依存する. 言い換えれば, これは圧力面上の θ (あるいは T) の分散に密接に関連している. もし $\bar{\theta}$ と \bar{T} が \bar{p} 面上の平均を表すならば,

$$p = \bar{p}[\theta(p)] \quad \text{and} \quad p' = \bar{p}(\theta - \theta') - \bar{p}(\theta) = -\theta' \partial \bar{p} / \partial \theta \quad .$$

よって, $\overline{(p'/\bar{p})^2} = (1/\bar{p}^2) \overline{(\theta' \partial p / \partial \theta)^2} = (1/\bar{p}^2) (\overline{\theta'})^2 (\partial \bar{p} / \partial \theta)^2$ であり, (1.10.75) は次のようになる.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{2} \kappa c_p g^{-1} p_s^{-\kappa} \int_{\theta_s}^{\theta_T} \frac{\bar{p}^\kappa}{\bar{p}} \overline{\theta'^2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{\kappa c_p}{2 g p_s^\kappa} \int_{p_s}^0 \bar{p}^{\kappa-1} \overline{\theta'^2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial p} \right)^{-1} dp \end{aligned} \quad (1.10.76)$$

さらに以下の関係,

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \frac{\kappa \bar{\theta}}{\gamma_d p} = -\frac{1}{\gamma_d - \bar{\gamma}}, \quad \gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}, \quad \gamma_d = g/c_p$$

$$\bar{\theta} = \bar{T}(p_s/p)^\kappa \quad \text{and} \quad \theta'/\theta = T'/T$$

を (1.10.76) に代入すれば \bar{A} の最終的な形式を得る.

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \int_0^{p_s} \frac{\bar{T}}{\gamma_d - \bar{\gamma}} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} dp \quad (1.10.77)$$

典型的な値として $\gamma = 2\gamma_d/3$, $\overline{T'^2} = (15 \text{ K})^2$ の場合を考えると,

$$\bar{A}/\overline{TPE} \sim 1/200 \quad (1.10.78)$$

となる. よって, 運動エネルギーに変換可能な全ポテンシャルエネルギーは全体の 1% に満たない. 単位断面あたりの大気のコラムがもつ運動エネルギー K と TPE はそれぞれ

$$K = \frac{1}{2g} \int_0^{p_s} V^2 dp, \quad TPE = \frac{c_v}{gR} \int_0^{p_s} c^2 dp \quad (1.10.79)$$

である. ここで, $c^2 = c_p RT/c_v$ は音速の 2 乗である.

$V/c \sim 1/20$ とすれば, 次のような大まかな見積りができる.

$$\bar{K}/\overline{TPE} \sim 1/2000 \quad \text{and} \quad \bar{K}/\bar{A} \sim 1/10 \quad (1.10.80)$$

したがって, 運動エネルギーに変換可能な全ポテンシャルエネルギーはわずかな割合であるという事実にもかかわらず, 依然としてそれは観測される平均的な運動エネルギーの 10 倍ほどである. 運動エネルギーが生成されないということは, 定義された APE が欠いているというよりむしろ運動エネルギーを解放するメカニズムが欠如していることを意味する.

天気予報に関して言えば, わずか 0.01% の誤差を含む TPE の変換を行う数値スキームは, 予期しない誤差として 20% の運動エネルギーの増加を生み出す.

(1.9.66) から (1.9.71) への変換と同様の変換法則が導ける (E の代わりに A を用いる) が, ここでは省略する.

いずれにしても, 非線形な移流項は平均的には運動エネルギーを生成しないので, 移流項のより良い数値的な取扱いは運動エネルギーの生成を避けなければならない.

1.11 渦度方程式と発散方程式

地球物理学的な系の力学を研究する目的において、また数値予報において、水平方向の運動のベクトル方程式(あるいは2本のスカラー方程式)を2本の他のスカラー方程式によって置き換えることは多くの場合有意義である。置き換える2本のスカラー方程式は、渦度方程式(vorticity equation)と発散方程式(divergence equation)と呼ばれる。

1.11.1 渦度方程式

三次元ベクトルの渦度はそのベクトルの回転であり、角速度の概念の一般化である。剛体回転の場合には、渦度は単に角速度の2倍である。大気において大規模な流れは準水平的であり、鉛直速度は水平速度に比べて数オーダー小さい。このことと大規模な流れの力学の特性のために、渦度の鉛直成分は原理的に重要であることが分かる。結果的に、水平速度ベクトルとその渦度の鉛直成分 $\zeta (= \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V})$ のみがふつう必要とされる。特に極座標においては、

$$\zeta = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{u}{a} \tan \phi. \quad (1.11.81)$$

ζ の時間変化率に対する方程式を導くことを考える。(1.7.23)と(1.7.24)をベクトル形式で書き、またベクトル恒等式 $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \nabla(V^2/2) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}$ を用いれば、

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(V^2/2) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{V} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = -\alpha \nabla p - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}$$

ここで、 $f = 2\Omega \sin \phi$ はコリオリパラメータである。絶対渦度 $\eta = f + \zeta$ を定義し、上の式の $\zeta \mathbf{k} \times \mathbf{V}$ と $-f \mathbf{k} \times \mathbf{V}$ の項を結合すれば、 $\eta \mathbf{k} \times \mathbf{V}$ を得る。次に、方程式全体に $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$ を作用させる。このとき、勾配の回転は恒等的にゼロとなるので上の式のいくつかの項は消える。また、 $\eta \mathbf{k} \times \mathbf{V}$ の項については、

$$\mathbf{k} \cdot [\nabla \times (\eta \mathbf{k} \times \mathbf{V})] = \mathbf{k} \cdot [\eta \mathbf{k} \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \nabla \cdot \eta \mathbf{k} - (\eta \mathbf{k} \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\eta \mathbf{k}]$$

と計算される。ここで \mathbf{V} や ∇ はそれぞれ2次元のベクトル・微分演算子であるので、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{k} \cdot \nabla = 0$ となり、真ん中の2項は消える。

結果、渦度方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \eta + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\eta \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{k} \cdot \nabla w \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \mathbf{k} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \quad (1.11.82)$$

ここで, $\partial f/\partial t = \partial f/\partial z = 0$ であることに注意すれば, (1.11.82) は次のようなよく使われる形式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(\zeta + f) + w \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial z} \\ = -(\zeta + f)\nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{k} \cdot \nabla w \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \mathbf{k} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.11.83)$$

ここで, 左辺は単に $d(\zeta + f)/dt$ と書ける. 上の渦度方程式を応用的に用いる際には多くの近似を施すことになるが, それは後ほど述べる.

1.11.2 発散方程式

理由は後ほど明かになるが, 3次元ベクトルの発散を $\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3$ と表記し, 水平発散を $D = \nabla \cdot \mathbf{V}$ とし, 分別的に取り扱うことにする. 特に球座標系においては,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{v}{a} \tan \phi$$

となる.

D の局所時間微分を含む方程式は, 水平方向の運動方程式の水平発散をとることで導かれる. まず, 水平発散をとった結果は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}] + \nabla \cdot (f\mathbf{k} \times \mathbf{V}) + \nabla w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + w \frac{\partial D}{\partial z} \\ = -\nabla \cdot (\alpha \nabla p) + \nabla \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.11.84)$$

しかし応用の目的のためには, 上の方程式の各項をさらに展開し, より小さな大きさの項を除去することによって簡単化されなければならない. 特に, 水平移流の項を変形すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla D + w \frac{\partial D}{\partial z} + \nabla w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + D^2 - 2J(u, v) \\ + (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla f - f\zeta = -\nabla \cdot (\alpha \nabla p) + \nabla \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.11.85)$$

となる. ここで, $J(u, v) = (\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y) - (\partial v/\partial x)(\partial u/\partial y)$ はヤコビアンである. 何か潜在的な利点がない限り, 水平運動の2本のスカラー方程式を高次の偏微分方程式である発散方程式や渦度方程式で置き換えることは, あまり意味がない. この定式化は, 簡単化のための近似を導入する一方で特定の物理プロセスを維持する方法を与える. より特定するならば, 近似は次に挙げる目的のどれかのために行

われる。(1) 力学の解析の簡単化 (2) 運動の特定の種類のフィルタリングまたは削除 (3) 数値予報モデルの簡単化, その他の理由である。

(1.11.85) の最初の 5 項は小さく, 一般的には無視される。最初の 3 項を落とすことはまた擾乱の特定の種類を取り除くことになる。同様に渦度方程式 (1.11.83) において, 鉛直速度を含む項・メトリック項・ $\zeta \nabla \cdot V$ の項はよく無視される。様々な項の削除は, スケール解析による適切な仮定のもとに正当化される。

ここで導いた渦度方程式と発散方程式は, 鉛直座標として幾何的な高度 z を伴う。他の座標系を用いたならば, 方程式の形式に違いが生じてくる。特に, よく使われる圧力座標系 p はいくつかの簡単化をもたらすだろう。例えば, 水平圧力勾配力の項の形式は $-\nabla\Phi$ となるために, $k \cdot \nabla \times \nabla\Phi = 0$ となる。よって, 渦度方程式 (1.11.83) の水平圧力勾配力に対応する項 $k \cdot \nabla p \times \nabla\alpha$ はゼロとなる。一方, 発散方程式 (1.11.85) で対応する項は $-\nabla^2\Phi$ となる。