

## 第8章 低緯度における線形力学

低緯度での大気海洋は、中緯度における大気海洋とはむしろ異なる特徴をもち、この章はその特徴を初めて味わうものである。味見は、むしろ痛みを和らげるものであり、数学的であろうし、波動の線形力学に焦点を当てる。ここでは低緯度における本当の現象論の中に入ることはないだろう。ここでの現象論とは、熱帯大気が湿気、対流そして積乱雲を伴い、また赤道上の海洋が下層流と赤道反流を伴うことを指す。そして間違いなく低緯度の大気海洋相互作用と、不思議なエルニーニョ現象の中には入らないが、これらはすべて後に触れる。むしろこの章は、ベータ効果が重要で、流れが完全には地衡流平衡下にはない場合の低緯度における浅水方程式系の線形地球流体力学に関するものである。さらにこれらの力学にあまり逆らわないでおこう。つまり、それらは正しいとともに、後に触れるようなより複雑な現象に対する前提としても重要である<sup>\*1</sup>。

低緯度の波動は、中緯度の波動よりも複雑である。中緯度においては、平衡下の運動と非平衡下の運動の間には時間スケールと空間スケールには非常に明らかな分かれ目があり、例えば準地衡流方程式系を用いて、重力波動をフィルタリングし、単に平衡下の運動を考えることで低緯度の波動を見分けることは有用である。赤道域においては、コリオリパラメータは非常に小さく、赤道ではゼロとなり、そこではロスビー数がオーダー 1 以上であり、そのような分け目はあまり有用ではない。けれども、 $f$  が小さくなると同時に、 $\beta$  は小さくなり、ロスビー波は重要なままであるが、ロスビー波と重力波の振動数の分け目はより小さい。よって、読者は赤道域における線形の波の問題からさえも生じる複雑さと、連続的に成層する流体における結合したロスビー波と重力波に対する分散関係式を決める複雑さが代数的に難しいことを読みながら想像するだろう。浅水方程式系の前後関係に問題を課すことでその操作は非常に簡単化され、このことは物理学的なモデル（例えば海洋における水温躍層のモデル）や 3.4.1 節のようなモデルの級数展開においても生じる。

詳細に入る前に、どうして‘赤道上の’海洋ではなく‘熱帯’大気について話すのかを尋ねる。緯度  $25^{\circ}$ - $30^{\circ}$  程度でのハドレーセルの端に大気における重要な境界があるからであり、この端において極方向と赤道方向とではむしろ力学が異なる。

---

<sup>\*1</sup>[原文脚注 1]

幾分対称的に、赤道に非常に接近するまでは海洋の力学はその重要な特徴を変えない。緯度  $10^\circ$  の海洋の力学は中緯度の特徴をたくさんもつ (例えば, なおロスビー数は小さい)。赤道域の非常に小さい緯度の範囲内に達する時にのみ定量的な方法で力学が変わる。

## 8.1 ロスビー波と重力波の共存

どのようにロスビー波と重力波が共存しているのかを調べるために、線形で一層の回転浅水方程式系,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (8.1a,b,c)$$

を考える。ここで、よく知られている浅水系の変数  $\phi = g'\eta$  と  $c^2 = g'H$  を用いている。また、 $\phi$  は動圧力、 $\eta$  は自由表面高度、 $H$  は流体の参照深さ、 $g'$  は低減重力である。(8.2 節で示されるように) いくつかの操作の後に、追加の近似は用いることなしに、これらの方程式系は  $v$  に対する一本の方程式、つまり、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \frac{f^2}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 v - \beta \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (8.2)$$

にまとめられる。ベータ平面上ではコリオリパラメータは  $f = f_0 + \beta y$  で与えられる。したがって、式 (8.2) は一定でない係数を持ち、かなりの代数的な難しさを伴う。8.2 節でこれらの難しさに触れるだろうが、今は式 (8.2) において  $\beta$  と  $f$  は定数であると仮定しよう。効果的に、区別されることを除いてコリオリパラメータ  $f$  は一定であると仮定し、準地衡流方程式系において中緯度で共通の近似を行う\*2。この近似はより複雑な問題に有用な導入を与える。

よって、式 (8.2) は定数係数を持ち、 $v = \tilde{v} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$  の形式の平面波の解を見つけることができ、それから、

$$\frac{\omega^2 - f_0^2}{c^2} - (k^2 + l^2) - \frac{\beta k}{\omega} = 0, \quad (8.3a)$$

である。与えられた式 (8.1) から予期されるように、これは  $\omega$  の三次方程式である。これを書き換えると、

$$\left( k + \frac{\beta}{2\omega} \right)^2 + l^2 = \left( \frac{\beta}{2\omega} \right)^2 + \frac{\omega^2 - f_0^2}{c^2}, \quad (8.3b)$$

\*2[原文脚注 2]

となり, これは式 (6.107) と比較できる. ここで,  $k_d^2 = f_0^2/g'H = f_0^2/c^2$  であることに注意し, 式 (8.3b) の右辺第二項に振動数を含む項が現れていること以外はこの二本の方程式は同等である. 波の進行を表す図は図 8.1 に示される. 任意の振動数での波数ベクトルはすべて,  $(-\beta/2\omega, 0)$  を中心とする円上にあり, ここで半径  $R$  は,

$$R = \left[ \left( \frac{\beta}{2\omega} \right)^2 + \frac{\omega^2 - f_0^2}{c^2} \right]^{1/2}, \quad (8.4)$$

で与えられ, 波が存在するためには半径が正でなければならない. 振動数が低い場合, 図は, 6.8 節で示したものと本質的に同じであるが, 振動数が高い場合には定量的には非常に異なる. 8.1.1 節以下でこれらの極限の場合について議論される.

完全な分散関係式を図示するためには, 時間 ( $T$ ), 長さ ( $L$ ) そして速度 ( $U$ ) に対して以下のスケールを用いて無次元化することが有用である:

$$T = f_0^{-1}, \quad L = L_d = k_d^{-1} = c/f_0, \quad U = L/T = c. \quad (8.5a,b,c)$$

無次元量をハットを用いて示すと, そのとき,

$$\omega = \hat{\omega}f_0, \quad (k, l) = (\hat{k}, \hat{l})k_d, \quad \beta = \hat{\beta}\frac{f_0^2}{c} = \hat{\beta}\frac{f_0}{L_d} = \hat{\beta}f_0k_d, \quad (8.6)$$

を得る. よって, 分散関係式 (8.3) は以下のように書き換えることができる:

$$\hat{\omega}^2 - 1 - (\hat{k}^2 + \hat{l}^2) - \hat{\beta}\frac{\hat{k}}{\hat{\omega}} = 0. \quad (8.7)$$

二つの解が重力波に一致し, 三番目の解がロスビー波に一致することを予測だろう. 分散関係式中の唯一のパラメータは,  $\hat{\beta} = \beta c/f_0^2 = \beta L_d/f_0$  である. 大気において,  $L_d$  の代表的な値は 1000 km であり, よって  $\hat{\beta} = 0.1$  である<sup>\*3</sup>. 海洋においては,  $L_d \sim 100$  km であるから,  $\hat{\beta} = 0.01$  である. もし, ‘外部’ ロスビー波 (これは幾分, 海洋学と関連する) を考えるならば, そのとき  $c = \sqrt{gH} = 200$  m s<sup>-1</sup>,  $L_d = 2000$  km であり, よって  $\hat{\beta} = 0.2$  である.

実際に解を得るために, 方程式を  $k$  の二次方程式とし, 振動数を用いて解くと,

$$\hat{k} = -\frac{\hat{\beta}}{2\hat{\omega}} \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{\beta}^2}{\hat{\omega}^2} + 4(\hat{\omega}^2 - \hat{l}^2 - 1) \right]^{1/2}, \quad (8.8)$$

<sup>\*3</sup> $\beta = 10^{-11}$  m<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $f_0 = 10^{-4}$  s<sup>-1</sup> を用いると,

$$\hat{\beta} = \beta L_d/f_0 = 10^{-11} \cdot 10^6/10^{-4} = 0.1,$$

である.

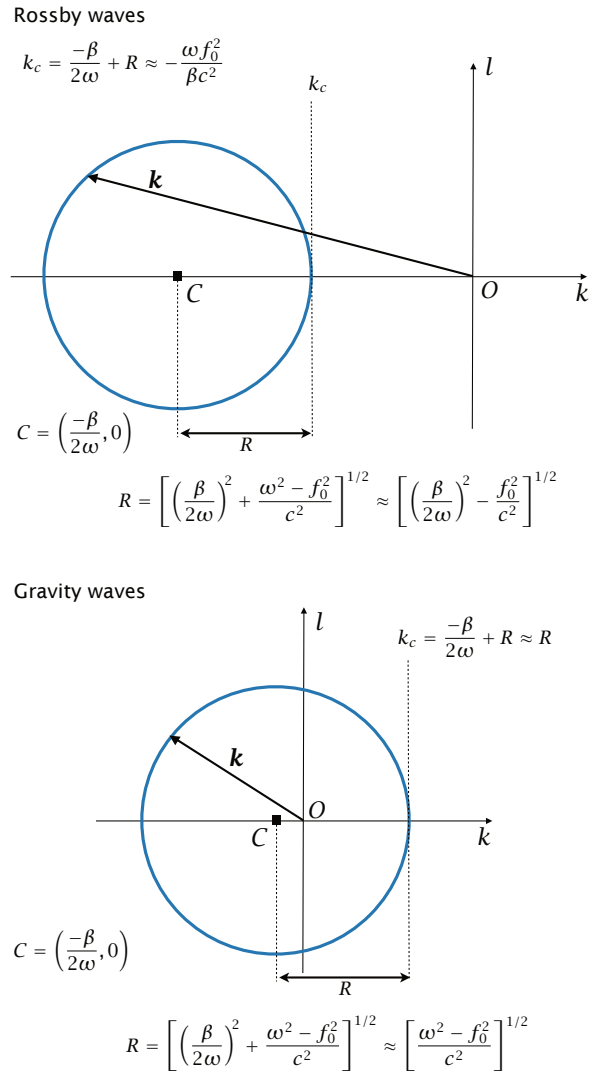


Fig. 8.1

図 8.1: 式 (8.3) を用いて得られたロスビー波と重力波の進行を表す図. 上図は低い振動数, つまりロスビー波の極限の図であり, 下図は高い振動数, つまり重力波の極限の図である. 各図においても任意の振動数に対する波数の位置は, 式 (8.4) で与えられる半径  $R$  をもち,  $C = (-\beta/2\omega, 0)$  を中心とする円にあるが, 近似的な表現は高振動数もしくは低振動数で非常に異なる.

を得る. 解は, 図 8.2 に図示されており, このとき  $\hat{\beta} = 0.2$  である. 図で重力波とロスビー波に示されているように, 波は二つのグループに分かれる. 実際のところ, より小さな (そして一般的により適切な)  $\hat{\beta}$  の値を用いれば, 波の二つのグループの間のギャップはさらに大きくなる. このことを全て解釈するために, いくつかの極限の場合を考えよう.

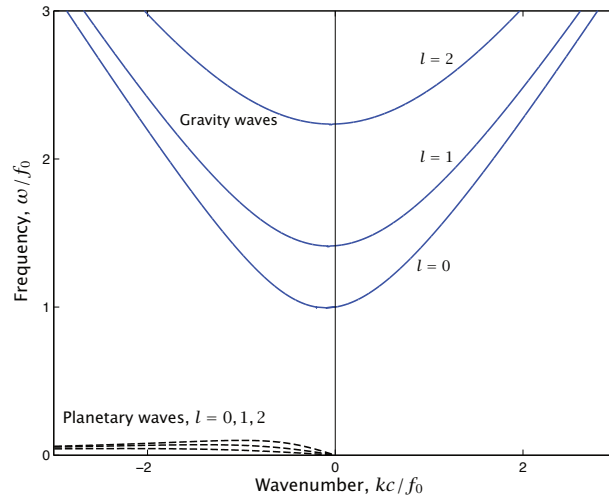


Fig. 8.2

図 8.2: 式 (8.8) から得られた  $l = 0, 1, 2$  の場合のロスビー波と重力波に対する分散関係. ロスビー波もしくは惑星波と, 重力波の間に振動数のギャップがある. 実際, 成層した中緯度大気に対する振動数のギャップはさらに大きい.

### 8.1.1 特別な場合と波の特性

今, 分散関係式に関していくつかの特別な場合を考える.

#### (i) 一定のコリオリパラメータ

もし  $\beta = 0$  ならば, そのとき分散関係式は,

$$\omega [\omega^2 - f_0^2 - (k^2 + l^2)c^2] = 0, \quad (8.9)$$

となり, 解は以下の通り:

$$\omega = 0, \quad \omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 + l^2). \quad (8.10a,b)$$

解  $\omega = 0$  は地衡流運動と一致し (そして,  $\beta = 0$  であるからロスビー波は存在しない), その他の解は, 3 章で考えたポアンカレ波と一致する.

## (ii) 高い振動数の波

もし  $\omega \gg f_0$  の極限をとるならば, そのとき式 (8.3a) は,

$$\frac{\omega^2}{c^2} - (k^2 + l^2) - \frac{\beta k}{\omega} = 0, \quad (8.11)$$

を与える. 物理的に現実的であるために, 今  $\beta$  の項を消去すべきでもある. なぜなら  $\omega \gg f_0$  であるならば, そのときある半球上での幾何学的な考えから  $k^2 \gg \beta k/\omega$  である\*<sup>4</sup>. したがって, 分散関係式は単に  $\omega^2 = c^2(k^2 + l^2)$  である. これらの波は回転によって影響されないような単なる重力波であり, ポアンカレ波の特別な場合である.

## (iii) 低い振動数の波

ここでは  $\omega \ll f_0$  の極限を考えよう. 分散関係式は,

$$\omega = \frac{-\beta k}{k^2 + l^2 + k_d^2}, \quad (8.12)$$

にまとめられる. これは単に, これまで得られたような (式 (6.65) と (6.92) を見よ) 準地衡流ロスビー波に対する分散関係式である. この極限において円の半径が正であるための必要条件は,

$$\omega^2 < \frac{\beta^2}{4k_d^2}, \quad (8.13)$$

となる\*<sup>5</sup>. つまり, ロスビー波は最高振動数をもち,  $k = k_d$  と  $l = 0$  であるとき式 (8.12) から直接生じる.

## 振動数のギャップ

大抵の場合, ロスビー波の最高振動数はポアンカレ波の振動数よりも非常に低い. ポアンカレ波の最低振動数は  $f_0$  であり, ロスビー波の最高振動数は  $\beta/2k_d$  である. したがって,

$$\frac{(\text{重力波の低い振動数})}{(\text{ロスビー波の高い振動数})} = \frac{f_0}{\beta/2k_d} = \frac{f_0^2}{2\beta c}, \quad (8.14)$$

\*<sup>4</sup>geometric considerations とは.

\*<sup>5</sup>式 (8.12) を変形すると,

$$\left(k + \frac{\beta}{2\omega}\right)^2 + l^2 = \frac{\beta^2}{4\omega^2} - k_d^2,$$

であり, この式の右辺が正である条件を考えることで導かれる.

である. もし  $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  そして  $k_d = 1/100 \text{ km}^{-1}$  (海洋の代表的な傾圧変形半径) であるならば, そのとき  $f_0/(\beta/2k_d) = 200$  である. もし  $L_d = 1000 \text{ km}$  (大気の傾圧変形半径) ならば比は 20 である. もし順圧変形半径  $L_d = 2000 \text{ km}$  を用いるならば, そのとき比は 10 である. 明らかなことだが, 中緯度における最も多い適用に対しては, ロスビー波の振動数と重力波の振動数の間には大きなギャップがある. このギャップのために, 良い近似としては, 重力波に対して式 (8.10b) を, ロスビー波もしくは惑星波に対して式 (8.12) を分けてプロットすることで図 8.2 が得られる.  $\hat{\beta}$  が小さくなるにつれてこれらと正確な結果の違いは小さくなり, 示した図において事実上見分けがつかなくなる.

### 8.1.2 惑星地衡流ロスビー波

大規模な海洋循環に対する良い近似は, 運動方程式中の時間微分と非線形項を無視することを含み, 熱力学方程式だけに時間発展を生じさせるようにする. このことは惑星地衡流近似であり, 5.2 節で紹介した. どの程度, 系がロスビー波を支えるのかを調べることは興味深い\*6. 単に最も簡単なことは浅水方程式系そのものから始めることであり, 運動方程式中の時間微分を除くと,

$$-fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (8.15a,b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (8.15c)$$

が得られる. これらの方程式系から直接的に,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{c^2 \beta}{f^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (8.16)$$

を得る. 再び  $f$  と  $\beta$  の両方を一定とし, よって  $\phi = \tilde{\phi} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$  の形式で解を探ることができる. その後の分散関係式は,

$$\omega = -\frac{c^2 \beta}{f_0^2} k = -\frac{\beta k}{k_d^2}, \quad (8.17)$$

であり, これは  $k^2, l^2 \ll k_d^2$  が与えられた式 (8.12) の極限の場合である. 波は, 位相速度と群速度がそれぞれ,

$$c_p = -\frac{c^2 \beta}{f_0^2}, \quad c_g^x = -\frac{c^2 \beta}{f_0^2}, \quad (8.18)$$

\*6[原文脚注 3]

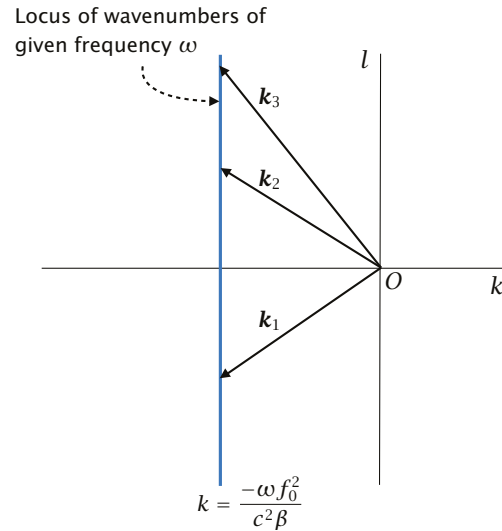


Fig. 8.3

図 8.3: 惑星地衡流ロスビー波の点の軌跡. 任意の振動数の波はすべて同じ  $x$  方向の波数を持ち, 式 (8.17) で与えられる.

で与えられるロスビー波の形式である. つまり, 波は非分散性で, 西へ進行する. 方程式 (8.16) は一般解  $\phi = G(x + \beta c^2/f^2 t)$  をもつ. ここで,  $G$  は任意の関数であり, よって初期の擾乱が形式を変えることなしで式 (8.18) によって与えられる速度をもちながら単に西へ進行する.

最後に, 普通のロスビー波に対するもののように  $k$ - $l$  空間中の波数の位置 (軌跡) はもはや円ではないことに注意せよ. むしろ, 振動数は  $y$  方向の波数に依存しないから, 図 8.3 にあるように位置は直線であり,  $y$  軸に平行である. 図 8.3 に示されるように一定の振動数をもつ波はすべて同じ  $x$  方向の波数を持ち,  $k = -\omega f_0^2 / (c^2 \beta) = -\omega k_d^2 / \beta$  で与えられる.

### 物理メカニズム

波はロスビー波の形式であるから, それらの物理メカニズムは 6.4.3 節で議論されたものとの関係があるが, 重要な相違点がある. その相違点とは, 相対渦度がもはや重要ではないが, 流れの収束が重要である. したがって, 図 8.4 に示されるように, 高気圧の領域付近の流れを考えよう. もし圧力が円状に対称的であるならば, 左図の  $H$  南部と右図の  $L$  南部にある流れは北部の流れよりも大きい. よって, 左図においては  $W$  で収束し,  $E$  で発散し, 流れのパターンが西へ進行する. 右図に



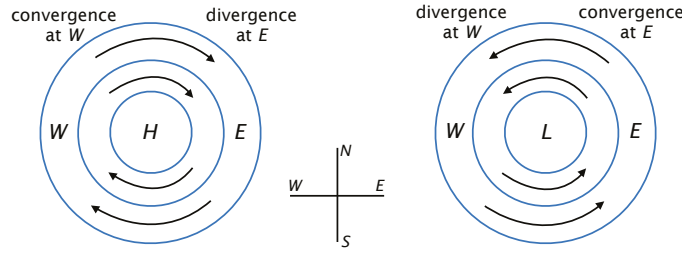


Fig. 8.4

図 8.4: 惑星地衡流ロスビー波の西への進行. 円状の線は, 高気圧と低気圧の中心付近で集められた等値線である. コリオリ力が変化するために二本の等値線間の質量フラックスは, 気圧中心の北部より南部のほうが強い. よって, 左図において高気圧の西部に収束があり, パターンは西へ進行する. 同様に, もし右図にあるように気圧中心が低いならば, 気圧中心の西部で発散があり, 依然としてパターンは西へ進行する.

ある流れにおいて低気圧が似た傾向を持ちながら西へ進行する.

## 8.2 赤道ベータ面上の波

今, 低緯度における浅水系の波の特性を議論し,  $\beta$  面近似を用いることではあるが, あらゆる項においてコリオリパラメータが適切に変化するようにする<sup>\*7</sup>. したがって, コリオリパラメータを緯度  $\theta_0$  付近で Taylor 展開し,

$$f = 2\Omega \sin \theta \approx 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega(\theta - \theta_0) \cos \theta_0 = f_0 + \beta y, \quad (8.19)$$

を得る. ここで,  $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$ ,  $\beta = 2\Omega \cos \theta_0/a$  そして  $y = a(\theta - \theta_0)$  である. ここに,  $a$  は地球半径である. 低緯度の運動に対して  $\theta_0 = 0$  とし, 赤道ベータ面近似  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$  そして  $f = 2\Omega\theta = \beta y$  を与える. そのとき線形化された運動方程式系と質量保存の式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (8.20a,b,c)$$

である. これらの式は今  $f = \beta y$  であることを除いては式 (8.1) と正確に同じである. 上の方程式系にはちょうど二つの有次元パラメータ  $c$  と  $\beta$  があり, これらからスケール,

$$T_{eq} = (c\beta)^{-1/2}, \quad L_{eq} = \left( \frac{c}{\beta} \right)^{1/2}, \quad (8.21a,b)$$

<sup>\*7</sup>[原文脚注 4]

を作ることができる。(後に議論するようにいくつかの定義は  $\sqrt{2}$  倍異なるけれども) これらのスケールは基本的な時間スケールと長さスケールである。長さスケール  $L_{eq}$  は赤道変形半径として知られる。もし 3.4 節にあるように上の浅水方程式系をプリミティブ方程式系のモデル分解法から来るとみなすならば, そのとき各モードに対する波の速度  $c_m = \sqrt{gH_m}$  と変形半径がある。最初の傾圧モードと大気に対しては, もし  $c_1 = 25 \text{ m s}^{-1}$  と  $\beta = 2.3 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  であるならば, そのとき  $L_{eq} \approx 1000 \text{ km}$  と  $T_{eq} \approx 0.5 \text{ 日}$  である。  $c = 2 \text{ m s}^{-1}$  である赤道海上の海洋に対しては, このとき  $L_{eq} \approx 300 \text{ km}$  と  $T_{eq} \approx 1.7 \text{ 日}$  である。

式 (8.20a) と (8.20b) を交差微分し, 式 (8.20c) を用いて発散を消去すると, 線形化されたポテンシャル渦度方程式, つまり,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \zeta - \frac{f\phi}{c^2} \right) + \beta v = 0, \quad (8.22)$$

を導くこともできる。この式は, 項  $Df/Dt = \beta v$  を用いた  $f$  平面上のよく知られた線形化されたポテンシャル渦度方程式と同じである。方程式 (8.22) は式 (8.20) から独立していないが, 時々この式を用いることは便利である。ひとつの未知数に対する一本の方程式を得るために式 (8.20a) に  $(f/c^2)\partial_t$ , 式 (8.20b) に  $(1/c^2)\partial_{tt}$ , 式 (8.20c) に  $(1/c^2)\partial_{ty}$ , そして式 (8.22) に  $\partial_x$  を作用する。微分を示すために下付き文字を用いると, 結果の方程式系は,

$$\frac{f}{c^2}u_{tt} - \frac{f^2}{c^2}v_t = -\frac{f}{c^2}\phi_{xt}, \quad \frac{1}{c^2}v_{ttt} + \frac{f}{c^2}u_{tt} = -\frac{1}{c^2}\phi_{ytt}, \quad (8.23a,b)$$

$$\frac{1}{c^2}\phi_{tty} + (u_{xyt} + v_{yyt}) = 0, \quad v_{xxt} - u_{xyt} - \frac{f}{c^2}\phi_{xt} + \beta v_x = 0, \quad (8.23c,d)$$

である。これらの方程式系は線形的に  $(a - (b + c + d))$  と結合し,  $v$  に対する一本の方程式, つまり,

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \frac{f^2}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \beta \frac{\partial v}{\partial x} = 0,} \quad (8.24)$$

を得る。

この方程式は三次式であり非定常の係数を持ち, したがって幾分か複雑である。進め前に, 時々長波近似と呼ばれるひとつの共通の近似を書き留めておこう。もし東西スケールが南北スケールよりも非常に大きいならば, そのとき東西風が南北の圧力勾配と地衡流平衡下にあると予測する。この場合, 式 (8.20b) を,

$$fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (8.25)$$

に置き換え, 式 (8.22) と (8.23b,d) は適宜修正される. そのとき, 式 (8.24) の代わりに,

$$\frac{f^2}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \beta \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (8.26)$$

を得る. この方程式は時間に関しては一次であり, 合理的にかつ率直に分散関係式が得られる. 8.4 節で見ると, この近似は強制散逸問題において特に有用である. 自由問題においては実際, 式 (8.24) から一般的な場合には十分簡単に分散方程式が得られ, 後の段階で長波近似を与える.

### 8.2.1 分散関係式

この節では式 (8.24) の特性を調べ, 特に一つの分散関係を得る. 式 (8.24) の係数は南北方向に変化するが, 東西方向には一定である. したがって, 東西方向のみ平面波の形式での解を調べ,

$$v = \tilde{v}(y) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (8.27)$$

とし,  $y \rightarrow \pm\infty$  で  $\tilde{v}(y) \rightarrow 0$  の境界条件を仮定する. 式 (8.24) に式 (8.27) を代入することで,

$$\frac{d^2 \tilde{v}}{dy^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{\beta k}{\omega} - \frac{\beta^2 y^2}{c^2} \right) \tilde{v} = 0, \quad (8.28)$$

を得る.

もし速度  $c$  と, ベータ効果の存在を仮定すれば, 方程式系を無次元化するための幾分明白な方法がある. けれども, スケーリングに  $\sqrt{2}$  の追加因子を入れることで, 後に紹介する問題のひとつの数学は簡単化される. 自明な差異を議論する危険を冒して, 両方とも実践しよう. 自信家でせっかちな読者は一方を選び, 他方をざっと読むことができる.

#### 無次元化 I

式 (8.21) にあるように量  $T_{eq} = (c\beta)^{-1/2}$ ,  $L_{eq} = (c/\beta)^{1/2}$  を用いて時間と長さをスケールしよう. そのとき, 無次元の振動数, 長さスケールそして波数は,

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{(\beta c)^{1/2}}, \quad \hat{y} = y \left( \frac{\beta}{c} \right)^{1/2}, \quad \hat{k} = k \left( \frac{c}{\beta} \right)^{1/2}, \quad (8.29)$$

によって与えられる. もし  $\delta\rho/\rho_0 = 0.002$ ,  $H = 100$  m そして  $\beta = 2\Omega/a = 2.3 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  とすると,

$$g' \approx 0.02 \text{ m s}^{-2}, \quad c \approx 1.4 \text{ m s}^{-1}, \quad L_{eq} \approx 250 \text{ km}, \quad T_\beta = 1.7 \times 10^5 \text{ s} \approx 2 \text{ 日}, \quad (8.30)$$

とわかる. 中緯度の浅水系変形半径  $L_d$  は大抵  $L_d = c/f$  で定義され, 式 (8.21b) とは  $f$  のぶん著しく明白に異なる. けれども, もし中緯度の表現では赤道付近かのように  $f = \beta y$  で  $y = L_d$  とすると, そのとき  $L_d = c/(\beta L_d)$  であり, これは式 (8.21b) と同じである.

式 (8.28) に式 (8.29) を代入すると僅かに簡単に見える方程式,

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\hat{y}^2} + \left( \hat{\omega}^2 - \hat{k}^2 - \frac{\hat{k}}{\hat{\omega}} - \hat{y}^2 \right) \tilde{v} = 0, \quad (8.31)$$

を得る. この方程式は,  $v(\hat{y}) = \Psi(\hat{y}) \exp(-\hat{y}^2/2)$  と書くことで標準的な形式\*8 にすることができ, 式 (8.31) から,

$$\frac{d^2\Psi}{d\hat{y}^2} - 2\hat{y}\frac{d\Psi}{d\hat{y}} + \lambda\Psi = 0, \quad (8.32)$$

となる. ここで,  $\lambda = \hat{\omega}^2 - \hat{k}^2 - \hat{k}/\hat{\omega} - 1$  である. 方程式 (8.32) はエルミート方程式として知られ, これは固有値方程式であり, もし  $m = 0, 1, 2, \dots$  に対する  $\lambda = 2m$  である場合とこの場合のみの解をもつ. 解はエルミート多項式であり,  $\Psi(\hat{y}) = H_m(\hat{y})$  であり, ここで低次の多項式は以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, & H_1 &= 2\hat{y}, & H_2 &= 4\hat{y}^2 - 2, \\ H_3 &= 8\hat{y}^3 - 12\hat{y}, & H_4 &= 16\hat{y}^4 - 48\hat{y}^2 + 12. \end{aligned} \quad (8.33)$$

$m$  が偶数もしくは奇数のときエルミート多項式はそれぞれ偶関数もしくは奇関数である. つまり,  $H_m(-\hat{y}) = (-1)^m H_m(\hat{y})$  である. エルミート多項式を用いることで  $v$  の場を表しており, よって  $m$  が奇数のとき赤道に関してミラー対称性が生じること注意到せよ. そのときこの章の付録 A に示されるように  $v$  の場は奇関数であるが,  $u$  の場と  $\phi$  の場は偶関数である.

ガウシアンが掛けられたエルミート多項式は放物柱関数,

$$V_m(y) = H_m(y) \exp(-y^2/2), \quad (8.34)$$

の形式である. これらの関数は区間  $[-\infty, +\infty]$  において直交性もある. つまり,

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_n V_m dy = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) H_m(y) \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}, \quad (8.35)$$

である. 付録 A では詳細を追記する. ここで  $\Psi$  に対するエルミート解を仮定すると,  $v$  に対する解は,

$$v(\hat{y}) = V_m(\hat{y}) = H_m(\hat{y}) e^{-\hat{y}^2/2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.36)$$

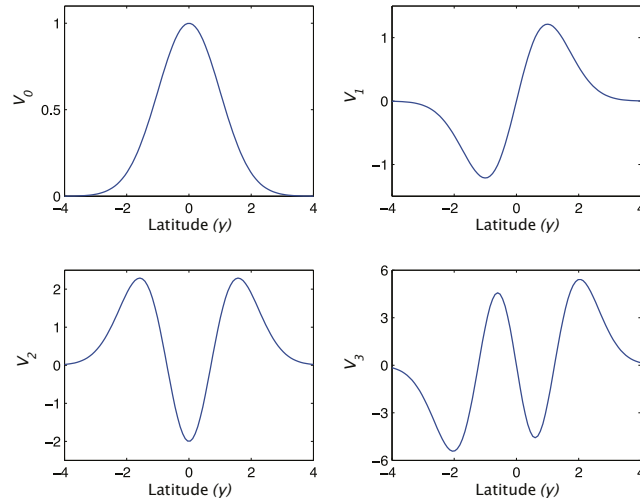


Fig. 8.5

図 8.5: 波の振幅, 式 (8.34) で与えられる放物柱関数  $V_m(y)$  の  $m = 0, 1, 2, 3$  に対する緯度変化. パラメータ  $m$  は南北波数と似ている. 式 (8.43) で与えられる放物柱関数は似た形式をもつが同じではない.

で与えられ, よってこの解は (必要であるように)  $\hat{y} \rightarrow \pm\infty$  のとき赤道変形半径  $\sqrt{c/\beta}$  の減衰スケールでもって指数関数的に減衰する. 図 8.5 には  $m = 0$  から 3 に対して関数  $V_m$  が描かれている.

量子化条件  $\lambda = 2m$  から分散関係式が導かれ,

$$\hat{\omega}^2 - \hat{k}^2 - \frac{\hat{k}}{\hat{\omega}} = 2m + 1, \quad (8.37a)$$

もしくは, 式 (8.29) を用いて有次元の形式,

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \beta \frac{kc^2}{\omega} = (2m + 1)\beta c, \quad (8.37b)$$

を示す. この式は  $\omega$  に関する三次方程式であり, 解を見つけることは可能であるけれども,

$$\hat{k} = -\frac{1}{2\hat{\omega}} \pm \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\hat{\omega}} - 2\hat{\omega} \right)^2 - 8m \right]^{1/2}, \quad (8.37c)$$

もしくは, 有次元の形式で,

$$k = -\frac{\beta}{2\omega} \pm \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta}{\omega} - \frac{2\omega}{c} \right)^2 - \frac{8m\beta}{c} \right]^{1/2}, \quad (8.37d)$$

\*8[原文脚注 5]

で与えられる振動数を用いて波数に対する二次方程式を解くほうが簡単である。方程式系 (8.37) は赤道ベータ面上の浅水方程式系に対する分散関係式の形式である。それらの特性を調べる前に異なる方法で無次元化する。

## 無次元化 II

今、量、

$$T_{eq} = (2c\beta)^{-1/2}, \quad L_{eq} = (c/2\beta)^{1/2}, \quad (8.38a,b)$$

をもつ時間と長さをスケールする。依然として速度は  $c$  で無次元化される。式 (8.28) の無次元形式は、

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\hat{y}^2} + \left( \hat{\omega}^2 - \hat{k}^2 - \frac{\hat{k}}{2\hat{\omega}} - \frac{\hat{y}^2}{4} \right) \tilde{v} = 0, \quad (8.39)$$

となり、この式は式 (8.31) と比較できる。今、

$$\tilde{v}(\hat{y}) = \Phi \exp(-\hat{y}^2/4), \quad (8.40)$$

と代用することで、

$$\frac{d^2\Phi}{d\hat{y}^2} - \hat{y} \frac{d\Phi}{d\hat{y}} + \gamma\Phi = 0, \quad (8.41)$$

と導かれる。ここで、 $\gamma = \hat{\omega}^2 - \hat{k}^2 - \hat{k}/2\hat{\omega} - 1/2$  である。独立変数  $y' = \hat{y}/\sqrt{2}$  へ変更することによって方程式 (8.41) は式 (8.32) へ変形することができ、そのとき同じように分散関係式が導かれる。より直接的には、式 (8.41) の解が、修正されたエルミート多項式  $\Phi(\hat{y}) = G_m(\hat{y})$  によって与えられる。ここで、

$$(G_0, G_1, G_2, G_3, G_4) = (1, \hat{y}, \hat{y}^2 - 1, \hat{y}^3 - 3\hat{y}, \hat{y}^4 - 6\hat{y}^2 + 3), \quad (8.42)$$

である。これらは確率的なエルミート多項式としても知られ、式 (8.33) や (8.151) は物理的なエルミート多項式であり、歴史的な利用を反映している。二組のエルミート多項式は  $H_n(y) = 2^{n/2}G_n(y\sqrt{2})$  によって関係づけられる。相当する放物柱関数は、

$$D_n(\hat{y}) = G_n(\hat{y}) \exp(-\hat{y}^2/4), \quad (8.43)$$

で与えられ、これらの関数は式 (8.39) の解である。修正された多項式に関する直交条件は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(y) D_m(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(y) G_m(y) \exp(-y^2/2) dy = \sqrt{2\pi n!} \delta_{nm}, \quad (8.44)$$

であり, これは式 (8.35) と比較できる.  $\gamma$  に関する量的な条件は,  $\gamma = m$  であり, ここで  $m = 0, 1, 2, \dots$  である. したがって, 無次元の分散関係式は,

$$\hat{\omega}^2 - \hat{k}^2 - \frac{\hat{k}}{2\hat{\omega}} - \frac{1}{2} = m, \quad (8.45)$$

であり, 式 (8.38) を用いて次元を戻すことで式 (8.37b) を得る. 後に, 安定した強制散逸問題を扱う時に確率的なエルミート多項式を用いることはもう少し便利である.

## 8.2.2 極限の場合と特別な場合

波の場合について詳しく調べるために一番目の無次元化, つまり式 (8.21) を用い, 何が起きているのかを明らかにする目的とともに分散関係式 (8.37) のいくつかの特別な場合について考えていく. 始めに波を振動数で分割することが便利であり, 高振動数の重力波と低振動数のロスビー波に分けて考えよう. ここで  $m \geq 1$  の場合にのみこのことを実行する必要がある. なぜなら  $m = 0$  の場合 (混合ロスビー波) は正確に扱われるからである. そのとき最終的にいわゆる  $m = -1$  の場合, つまりケルビン波を見ていく.

### 高振動数の波と低振動数の波

1. 高振動数の波. 式 (8.37) 中の項  $\beta kc^2/\omega$  は小さく, 無視することができる. 分散関係式は,

$$\hat{\omega}^2 = \hat{k}^2 + 2m + 1, \quad \text{or} \quad \omega^2 = c^2 k^2 + \beta c(2m + 1), \quad (8.46a,b)$$

となる. この分散関係式は中緯度のポアンカレ波のものと似ており,  $f_0^2$  を  $\beta c$  に置き換えている. つまり式 (3.121) の形式, つまり  $\omega^2 = c^2(k^2 + l^2) + f_0^2$  を思い出そう. したがって, 式 (8.46) を満たす波は時折, 赤道に捕捉されたポアンカレ波もしくは赤道に捕捉された重力波と呼ばれる.

有限の  $m$  に対して, 高波数で極限の場合は単に  $\hat{\omega} = \pm \hat{k}$  もしくは有次元で  $\omega = \pm ck$  である. これはよく知られた便利な浅水重力波に対する単なる分散関係式であり, 回転と  $\beta$  効果の影響を受けない. けれども, 回転の場合において波は赤道で捕捉され, 東向きと西向きに関わらず東西方向に進行する.

2. 低振動数の波. 低振動数の波に対して, 式 (8.37) 中の  $\omega^2$  を含む項を無視し, 分散関係式は,

$$\hat{\omega} = \frac{-\hat{k}}{2m + 1 + \hat{k}^2}, \quad \omega = \frac{-\beta k}{(2m + 1)\beta/c + k^2}, \quad (8.47)$$

となり, それぞれ無次元と有次元である. この式は, 大きな  $x$  方向の波数を伴い東西方向に進行するロスビー波に対する分散関係式として見分けが付き, これらの波は赤道面上に捕捉されたロスビー波もしくは赤道面上で捕捉された惑星波と呼ばれる. 以下のように, これらの波に関する二つの極限についてさらに考えることができる.

(a)  $\hat{k} \rightarrow \infty, \hat{\omega} \rightarrow 0$  での低振動数の短波. 分散関係式は,

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{\hat{k}}, \quad \omega = -\frac{\beta}{k}, \quad (8.48)$$

となる. この極限において位相速度と群速度はそれぞれ, 有次元で,

$$c_p = -\frac{\beta}{k^2}, \quad c_g = \frac{\beta}{k^2}, \quad (8.49)$$

で与えられる. したがって, 位相速度は西向きだが, 群速度は異なり, よってエネルギー伝搬の向きは東向きである.

(b)  $\hat{k} \rightarrow 0, \hat{\omega} \rightarrow 0$  での低振動数の長波. 分散関係式 (8.37) は, 無次元と有次元の形式で,

$$\hat{\omega} = \frac{-\hat{k}}{2m+1}, \quad \omega = \frac{-ck}{2m+1}, \quad (8.50)$$

となる. これらは西へ進行する波であり,  $c/(2m+1)$  で与えられる速度をもつ.  $m=1$  (惑星波に対する最小の正確値) に対して, それらは無回転の重力波もしくは (以下で議論される) ケルビン波の三分の一の速度をもつ. けれども, これらの波は西にのみ進行し, 波数が増加していくにつれて上のように導かれる, 西へ進行する惑星波に匹敵する. それらは好都合なことに非分散性であり, 西側境界付近でも重要であり, そこでは西側境界での流れを形成するためにそれらが重ねられている (?). 初めから長波近似がなされており, その近似は, 東西流が地衡流平衡下にあると仮定することと同等である. つまり, 式 (8.20b) が  $fu = -g'\partial\eta/\partial y$  に置き換わる. そのとき, 式 (8.24) を解く代わりに式 (8.26) を解く. 式 (8.32) 中の  $\lambda$  の値にある唯一つの違いは,  $\lambda = -\hat{k}/\hat{\omega} - 1$  とわかり, よって式 (8.50) がすぐに導かれる. 短波は系からフィルタリングされている. 8.5 節で安定問題を考えるときにこの近似が特に重要であるとわかるだろう.

式 (8.46) で与えられる重力波の最低振動数と,  $m$  が小さいとするような式 (8.49) で与えられる惑星波の最高振動数には異なるギャップがある.  $k=0$  のとき重力波の最低振動数が生じ,  $\omega_{gmin}^2 = \beta c(2m+1)$  である. 式 (8.47) から  $k^2 = (2m+1)\beta/c$  のとき, 惑星波の最高振動数が生じ,  $\omega_{pmax}^2 = \beta c/[4(2m+1)]$  で与えられる. これらの二つの振動数の比は,

$$\frac{\omega_{gmin}}{\omega_{pmax}} = 2(2m+1), \quad (8.51)$$



であり,  $m = 1$  に対しては 6,  $m = 0$  (少し下で考える場合) に対しては 2 を与える. この比は物理パラメータ  $\beta$  と  $c$  に無関係であることに注意せよ. ギャップは異なるけれども, 中緯度において 1 次以上のオーダーをもつ相当ギャップほど大きくはない.

### 特別な値 $m$

低振動数と高振動数での極限の場合に加えて, 二つの他の場合があり, これらは分散関係式を簡単に解くことができる. つまりは  $m = 0$  とケルビン波の場合であり, 以下の通り:

1.  $m = 0$  の場合. 結果として得られる波は二つの波の方に及ぶため, それらはヤナイ波<sup>\*9</sup>, もしくはロスビー重力波として知られる. それらは赤道を横切って非対称である. 式 (8.37a) から分散関係式は,

$$\hat{k} = -\hat{\omega}, \quad \text{or} \quad \hat{k} = -\frac{1}{\hat{\omega}} + \hat{\omega}, \quad (8.52a,b)$$

もしくは有次元で,

$$k = -\frac{\omega}{c}, \quad k = -\frac{\beta}{\omega} + \frac{\omega}{c}, \quad (8.53a,b)$$

と簡単になる.  $k = -\omega/c$  の場合は西へ移動する重力波を示すため, 非物理的である. 以下のケルビン波に関する議論中で明確に議論するように,  $|y|$  が赤道から離れて増加するにつれて限度なしにこのような波が発達する. 物理的に実現的な場合 (8.53b) は明確な分散関係式,

$$\omega = \frac{kc}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k^2 c^2 + 4\beta c}, \quad (8.54)$$

をもつ. 再び以下のようないくつかの極限の場合を考えることが有用である:

- $k = 0$ . この場合, 式 (8.54) は  $\omega = \sqrt{\beta c}$  を与え, 式 (8.53b) の右辺にある二つの項でのバランスがある, 図 8.6 において  $k = 0$  でのヤナイ波は無次元の振動数 1 で切片をとる.
- $k \rightarrow +\infty$ . この場合,  $\omega = ck$  であり, 式 (8.53b) の左辺と右辺第二項がバランスする. 明らかに, これは東へ進行する重力波に一致する.
- $k \rightarrow -\infty$ . この場合,  $\omega$  が正でなければならないから,  $\omega = -\beta/k$  であり, 式 (8.53b) の左辺と右辺第一項のバランスがある. 波は西へ進行するロスビー波もしくは惑星波である.

<sup>\*9</sup>[原文脚注 6]

それゆえにヤナイ波は混合ロスビー重力波である。つまり、(あらゆるロスビー波と同様) ロスビー波の位相は西へ進行し、重力波は東へ進行する (そして伝統的な重力波と異なり、東にのみ進行する)。ヤナイ波の群速度はあらゆる場合において正であり、式 (8.53b) から、

$$c_g^x \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\omega^2 c}{\beta c + \omega^2}, \quad (8.55)$$

で与えられる。正式な問題の群速度は式 (8.37) から、

$$c_g^x = \frac{c^2 \omega (\beta + 2\omega k)}{2\omega^3 + \beta k c^2}, \quad (8.56)$$

である。これは正もしくは負であり、 $\omega = -\beta/2k$  のとき消える。

2. ケルビン波、もしくは ‘ $m = -1$ ’ の場合。 (この節は 3.8.3 節の拡張と考えることができる。) 一般的に  $m$  が正もしくはゼロのときにエルミート方程式 (8.32) は解をもつ。けれども、 $m = -1$  つまり赤道ケルビン波の分散関係式 (8.37) を満たすために生じる波の分類がある。これらの波は恒等的に南北速度ゼロであり、よって運動方程式系は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g' \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad f u = -g' \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (8.57a,b,c)$$

である。ここで  $f = \beta y$  である。東西速度は南北方向の圧力勾配と地衡流平衡下にあり、式 (8.57a) と (8.57c) から古典的な波動方程式、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (8.58)$$

を得る。ここで、以前のように  $c = \sqrt{g'H}$  であり、よって分散関係式  $\omega = \pm ck$  である。実際、簡単に確認できることだが、これは  $m = -1$  を用いた式 (8.37) の解である<sup>\*10</sup>。式 (8.58) の解と、 $\eta$  に対する一致解は、

$$u = F_1(x+ct, y) + F_2(x-ct, y), \quad \eta = \left(\frac{H}{g'}\right)^{1/2} [-F_1(x+ct, y) + F_2(x-ct, y)], \quad (8.59)$$

である。ここで、 $F_1$  と  $F_2$  は任意の関数であり、それぞれ西へ伝搬する波と東へ伝搬する波を示す。式 (8.57b) を用いることでこれらの関数の  $y$  方向依存性を得ることができ、

$$\beta y F_1 = c \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \beta y F_2 = -c \frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad (8.60)$$

<sup>\*10</sup>式 (8.37d) に  $m = -1$  を代入すると、 $k = 2\omega/c, -\beta/\omega - \omega/c$  が得られ、ここにある解と一致していないような...

で与えられる。これらの方程式系の解は、

$$F_1 = F(x + ct) \exp [y^2 / (2L_{eq}^2)], \quad F_2 = G(x - ct) \exp [-y^2 / (2L_{eq}^2)], \quad (8.61a,b)$$

である。ここで、 $F$  と  $G$  は  $y = 0$  での振幅である (?)。明らかに、赤道から離れると限度なしに  $F_1$  が増加し、よってこの解は消えなければならない。したがって完全な解は以下の通り:

$$u = G(x - ct) \exp [-y^2 / (2L_{eq}^2)], \quad \eta = \frac{H}{c} u, \quad v = 0. \quad (8.61)$$

分散関係式は、

$$\omega = ck \quad (8.62)$$

である。これらの波は赤道上で補足されたケルビン波である。それらは分散性なしに東にのみ進行し、主に上で考えた他の赤道上の波と同じだが、式 (3.135) で与えられる  $f$  平面上のケルビン波とはわずかに異なるやり方で、それらの振幅は赤道に離れると減衰する<sup>\*11</sup>。

### 8.2.5 赤道ロスビー波のポテンシャル渦度力学

上で導出されたロスビー波とロスビー重力波はむしろ中緯度のものと似ており、それは非平衡力学を全く含めることなしに平衡したポテンシャル渦度方程式から導かれる。赤道ロスビー波に対して似たことができるだろうか？ 方法は少しその場しのぎなものであるが、答えは Yes である<sup>\*12</sup>。ケルビン波と慣性重力波はフィルタリングされているが、ロスビー波とロスビー重力波の力学をわかりやすく説明する方法でそれらが再現される。

強制なしの線形ポテンシャル渦度方程式から始め、それらは、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \zeta - \frac{f\phi}{c^2} \right) + \beta v = 0, \quad (8.66)$$

であることを思い出そう。ここで、これまでと同じく  $f = \beta y$  である。今、発散は小さく、流れは地衡流平衡に近いと仮定すると、速度場、渦度場そして高度場はす

<sup>\*11</sup>式 (3.135) を再掲する:

$$u' = e^{-y/L_d} G(x - ct), \quad v' = 0, \quad \eta' = \sqrt{H/g} e^{-y/L_d} G(x - ct). \quad (8.63)$$

<sup>\*12</sup>[原文脚注 8]

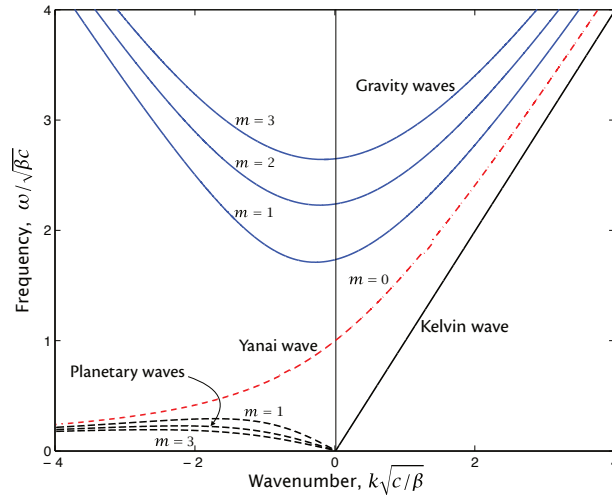


Fig. 8.6

図 8.6: 式 (8.37) で与えられるような赤道波の  $m = 0, 1, 2, 3$  に対する分散関係. 曲線の上群は重力波であり, 式 (8.46) で近似的に与えられる.  $k < 0$  の下群は西へ進行する惑星波であり, 式 (8.47) で与えられる. また,  $m = 0$  で式 (8.54) を満たすヤナイ波と,  $k \geq 0$  に対して  $\omega = ck$  を満たす東進ケルビン波 ( $m = -1$  の波) が示される.

べて流線関数を用いて以下のように書ける:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \zeta = \nabla^2\psi, \quad \phi = f\psi. \quad (8.67)$$

これは, コリオリパラメータが  $f = \beta y$  で変化することを除いて, 準地衡流近似で行ったものと似ている. 方程式 (8.67) は正確に正当化されないために, この式は仮説, つまり便利性的のためにされる近似や仮定, とよくみなされる.

式 (8.66) に式 (8.67) を用いることで,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla^2\psi - \frac{f^2\psi}{c^2} \right) + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad (8.68)$$

を得る.

$$\psi = \tilde{\psi}(y)e^{i(kx - \omega t)}, \quad (8.69)$$

の形式で式 (8.68) の波型解を見つけることができ, 式 (8.68) は,

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dy^2} - \left( k^2 + \frac{\beta k}{\omega} + \frac{\beta^2 y^2}{c^2} \right) \tilde{\psi} = 0, \quad (8.70)$$

となる. この式は,  $\tilde{v}$  が  $\tilde{\psi}$  に置き換わっていることと括弧内に  $\omega^2$  の項が無いことを除いて式 (8.28) とほとんど同じである. 南北速度は単に  $\partial\psi/\partial x \propto k\psi$  であるこ

とから、南北速度は  $\tilde{\psi}$  と同じ方程式に従い、低振動数の極限にあることから  $\omega^2$  が無くなる。したがって、式 (8.28) の発展を単に繰り返して、式 (8.37b) と似ているが  $\omega^2$  項のない分散関係式が得られ、

$$\omega = \frac{-\beta k}{(2m+1)\beta/c + k^2}, \quad (8.71)$$

を知る。この式は 8.2.2 節で議論した低振動数の波に対する分散関係式と同じである。したがって、平衡系 (8.68) は低振動数の極限においてロスビー波とロスビー重力波を正確に再現する。この方法論によってケルビン波を再現することはできない。なぜならそのような波は本質的に非平衡であるからである。つまり、式 (8.65) にあるように南北方向においてコリオリ力は高度場とバランスするが、東西方向には東西加速と圧力勾配のバランスがあるからである<sup>\*13</sup>。

## 8.3 波線追跡法と赤道捕捉

赤道付近で赤道波が補足されることを見てきた。そのとき初期に赤道から離れてある方向に進む波に何が起こるのか？ その波は、その特性を完全に变えるか、もしくは赤道に向かって屈折されるかの一方を取らなければならない。似た振動数と波数をもつ類の中緯度の波が存在する場合にのみ前者は起こるが、別の観点ではそのような波は存在せず、波が吸収されない場合、エネルギーが保存されるべきならば、波は帰ってこなければならない。6.3 節で議論したように波線理論からいくつかの考えを用いてこのことを調べていこう。

### 8.3.1 分散関係式と波線方程式

再び南北速度に対する運動の波動方程式 (8.24) を考えよう。  $v = \tilde{v}(y)e^{i(kx-\omega t)}$  の形式の解を見つけると、

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dy^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{\beta k}{\omega} - \frac{\beta^2 y^2}{c^2} \right) \tilde{v} = 0, \quad (8.72)$$

を得る。もし括弧内の項が正ならば、そのとき  $y$  に関して正弦型の解が可能であるが、括弧内の項がある臨界値  $y_c$  より大きな  $y$  に対して負であるならば、そのとき物理的に実現可能な解は  $y$  とともに指数関数的に減少する。つまり、波型の解は二

<sup>\*13</sup>式 (8.64) と (8.65) のことか。

つの臨界緯度の間で捕捉される. 分散関係式 (8.37) を用いると, 方程式 (8.72) は,

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dy^2} + \left( \frac{(2m+1)\beta}{c} - \frac{\beta^2 y^2}{c^2} \right) \tilde{v} = 0, \quad (8.73)$$

となり, それゆえ臨界緯度が,

$$y_c = \pm \left( \frac{\omega^2}{\beta^2} - \frac{c^2 k^2}{\beta^2} - \frac{c^2 k}{\beta \omega} \right)^{1/2} = \pm \left( (2m+1) \frac{c}{\beta} \right)^{1/2}, \quad (8.74)$$

与えられる.  $k = 0$ , よって南北方向に進行する波に対して, 臨界緯度は  $y_c = \omega/\beta$  で与えられ, 臨界緯度において  $\omega = f$  である. それゆえ波はそれらの慣性緯度, つまり波の振動数が  $f$  となる緯度の範囲内で捕捉される.

波線理論を用いることでこの現象を調べるために, 媒質 (?) が十分ゆっくりと変化していくと仮定すると,  $y$  方向の波数が空間的に変化するような波型の解を見つけることが可能である. 式 (8.72) を,

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dy^2} + l^2(y)\tilde{v} = 0, \quad (8.75)$$

$$l^2(y) = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{\beta k}{\omega} - \frac{\beta^2 y^2}{c^2} = \frac{\beta^2}{c^2} (y_c^2 - y^2) m, \quad (8.76)$$

と書く. ここで,  $l(y)$  は WKB のセンス (本文 247 ページの付録 A を見よ) でゆっくりと変化すると仮定される. WKB 解は,

$$\tilde{v}(y) = l^{-1/2} \exp\left(\pm i \int l dy\right), \quad (8.77)$$

である.

波の軌道は波路, つまり群速度の平行な通路, によって決まり, よってそれらの軌道  $x(t)$ ,  $y(t)$  は,

$$\frac{dx}{dt} = c_g^x, \quad \frac{dy}{dt} = c_g^y, \quad \text{and} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{c_g^y}{c_g^x}, \quad (8.78)$$

で与えられる. 分散関係式 (8.76) を用いて,

$$\frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2\omega^2 l c^2}{2\omega^3 + \beta k c^2}, \quad (8.79)$$

を得て, この式と式 (8.56) を用いることで  $x$ - $y$  平面において波線の勾配,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_g^y}{c_g^x} = \frac{l}{k + \beta/(2\omega)}, \quad (8.80)$$

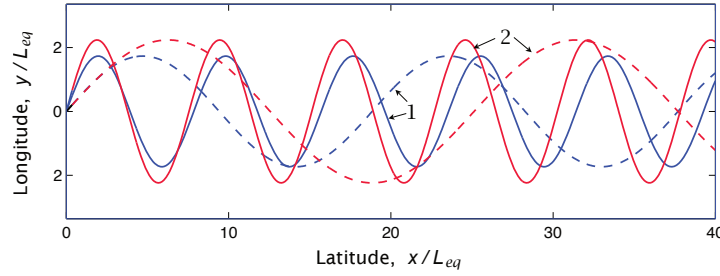


Fig. 8.10

図 8.10: 式 (8.83) を用いて計算される赤道上の導波管中の波線. 破線は惑星波の軌道を示し, 実線は重力波である. ここで  $m = 1, 2$  (グラフ上で記された番号),  $\hat{k} = 1$  である. 各波に対する緯度の変わり目は  $(2m + 1)^{1/2} L_{eq}$  であり, ここで  $L_{eq} = \sqrt{c/\beta}$  である.

を得る. 式 (8.76) によって与えられる  $l$  に対する表現を用いて,  $l$  の代わりに  $y$  を用いて上式を書くことができ, よって,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta(y_c^2 - y^2)^{1/2}}{kc + \beta c/(2\omega)}, \quad (8.81)$$

である. 標準的な結果,

$$\int \frac{dy}{(y_c^2 - y^2)^{1/2}} = \sin^{-1} \frac{y}{y_c}, \quad (8.82)$$

を用いて, 最終的に,

$$y = y_c \sin \left[ \frac{\beta x}{ck + \beta c/(2\omega)} \right], \quad \hat{y} = (2m + 1)^{1/2} \sin \left[ \frac{\hat{x}}{\hat{k} + 1/(2\hat{\omega})} \right], \quad (8.83)$$

を得る. ここで, 二番目の表現は無次元の形式である. それゆえ波路は赤道に沿って移動する正弦波である. 図 8.10 にあるように, 波は赤道を中心とする導波管に制限され, 極方向の広がり  $y = \pm y_c$  をもつ. 方程式 (8.83) は惑星波と重力波に対して満たされ, 後者に対しては項  $\beta c/(2\omega)$  が無視される.

## 8.4 波型の強制散逸流れ

今, 強制と減衰のある線形の赤道力学を考える. (この問題の幾分簡単な取り扱い は 22.7 節に与えられ, そのときまで問題を考えることを遅らせようとする読者がいるかもしれない. 8.5 節で強制ありの安定問題の重要で特別な場合が取り扱われ, その節まで飛ばして必要に応じてここに戻ってくることも可能である.) もし強制があるならば, そのとき減衰が必要になり, よって安定状態が達せられる. そ

して最も簡単な形式は線形摩擦である。物理的な観点からそのような摩擦があることは、我々の取り扱いにおいて最も不十分な側面である。その理由とは、特に数学的な理由のために摩擦が運動と高度に対して同じでなければならない (摩擦時定数と放射時定数が等しいことを示唆する) ように、真の物理的な正当化でないからである。にもかかわらず、ある摩擦の形式と線形摩擦が最も簡単な形式であるように、しばしば未解決の小さな仮定が働いている。初めに完全な問題を考え、それから特別な場合について考えていく。

有次元で線形の強制散逸運動方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = F^x, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha v + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = F^y, \quad (8.84a,b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -Q, \quad (8.84c)$$

である。ここで、 $F^x$  と  $F^y$  は課せられる強制の  $x$  成分と  $y$  成分であり、 $Q$  は熱源や質量源、そして  $\alpha$  は摩擦係数であり、三つの変数すべてに対して同じであると仮定される。もし  $\mathbf{F} = (F^x, F^y)$  を風応力  $\boldsymbol{\tau}$  と解釈し、この応力が流体層へ作用するならば、それを結合して  $\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} / \rho_0 H$  である。なおここではこの系を単に地球流体力学における問題として扱う。式 (8.84) <sup>\*14</sup> に相当するポテンシャル渦度方程式が式 (8.84a) と (8.84b) を交差微分することで得られ、

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right] \left( \zeta - \frac{f}{c^2} \phi \right) + \beta v = \text{curl}_z \mathbf{F} + \frac{fQ}{c^2}, \quad (8.85)$$

である。

式 (8.24) を導出した方法と非常に同じ方法で  $v$  に対する一本の偏微分方程式、つまり、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right]^3 v + \frac{f^2}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right] v - \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right] \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \beta \frac{\partial v}{\partial x} \\ & = \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right] \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{f}{c^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \\ & \quad + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right]^2 F^y - \frac{f}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right] F^x - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (8.86)$$

を導くことができる。左辺は式 (8.24) のあまり見ない形である。この方程式は明らかに非常に複雑であり、もしかするとあまり魅力的でないかもしれない。式 (8.24) で用いた方法と似た方法で (もしくは数値的に) 方程式が解かれるかもしれないが、

<sup>\*14</sup>式 (8.66) の間違いではないか。



以下に挙げる二つの相違点をもつようなあまり形式的でない方法を用いて進めていく:

- (i) 式 (8.84) の特別な場合のみについて考える. 例えば, 式 (8.84b) を地衡流平衡  $fu = -\partial\phi/\partial y$  に簡単化し, 8.5 節では方程式系の安定版に注意を払っていく.
- (ii) 変数を  $(u, v, \phi)$  から, 以下で定義されるような,  $v$  と, 変数  $u, \phi$  間のより簡単な結合でもってなされる一組の  $(q, r, v)$  へ変換する.

### 8.4.1 数学的な変形

計算の便利さのために以下のような  $u$  と  $\phi$  の線形結合を導入する:

$$q \equiv \frac{\phi}{c} + u, \quad r \equiv \frac{\phi}{c} - u. \quad (8.87)$$

ここで  $u$  と  $\phi$  は赤道を横切って同じ自然の (?) 対称性をもち, 別のやり方で強制としない限り (?) 両方とも対称性をもち, 一方で  $v$  は非対称性をもつ傾向があることに注意せよ<sup>\*15</sup>.  $u$  の運動方程式と高度 ( $\phi$ ) 方程式は  $q$  と  $r$  に対する方程式系, つまり,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)q + c\frac{\partial q}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial y} - fv = F^x - Q/c, \quad (8.88a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)r - c\frac{\partial r}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial y} + fv = -F^x - Q/c, \quad (8.88b)$$

と書くことができ,  $v$  の運動方程式は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)v + \frac{f}{2}(q - r) = -\frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial y}(q + r) + F^y, \quad (8.88c)$$

となる.

### 無次元化

速度は  $c$  でスケールされ, 時間と距離は,

$$T_{eq} = (c2\beta)^{-1/2}, \quad L_{eq} = (c/2\beta)^{1/2}, \quad (8.89a,b)$$

<sup>\*15</sup>なんのこっちゃ.

でスケールされる. そのとき無次元の運動方程式系は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)q + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2}yv = F^x - Q, \quad (8.90a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)r - \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}yv = -F^x - Q, \quad (8.90b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)v + \frac{y}{4}(q - r) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(q + r) + F^y, \quad (8.90c)$$

である. ここでは混乱を避けるために無次元変数に対して特別な表記を用いない.

これらの方程式系の解は放物柱関数  $D_n(y)$  を用いて表現することができる. つまり, 以下の形式の解を見つける:

$$(v, q, r) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n(x, t), q_n(x, t), r_n(x, t)) D_n(y). \quad (8.91)$$

これは似た形式で展開された強制項をもつ. 放物柱関数そのものは,

$$(D_0, D_1, D_2, D_3) = (1, y, y^2 - 1, y^3 - 3y) \exp(-y^2/4), \quad (8.92)$$

などの形式をもつ. 多項式の項は式 (8.42) で与えられる単なる修正されたエルミート多項式  $G_n(y)$  である. 放物柱関数は以下のはしご特性に従う:

$$\frac{dD_n}{dy} + \frac{1}{2}yD_n = nD_{n-1}, \quad \frac{dD_n}{dy} - \frac{1}{2}yD_n = -D_{n+1}. \quad (8.93a,b)$$

もし式 (8.91) を式 (8.90) に代入するならば振幅に対する常微分方程式系を得る.  $q$  の方程式 (8.90a) から, すこし計算すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)q_0 + \frac{\partial q_0}{\partial x} = F_0^x - Q_0, \quad (8.94a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)q_{n+1} + \frac{\partial q_{n+1}}{\partial x} - v_n = F_{n+1}^x - Q_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (8.94b)$$

を得る.  $r$  の方程式 (8.90b) から,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)r_{n-1} - \frac{\partial r_{n-1}}{\partial x} + nv_n = -(F_{n-1}^x + Q_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.95)$$

とわかり,  $v$  の方程式 (8.90c) から,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)v_0 + \frac{q_0}{2} = F_0^y, \quad (8.96a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)v_n + \frac{(n+1)}{2}q_{n+1} - \frac{r_{n-1}}{2} = F_n^y, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.96b)$$

とわかる<sup>\*16</sup>. 最後に派生することなしにこれらの方程式系が結合され,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right]^3 v_n + \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right] \left( (2n+1)v_n - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v_n}{\partial x} = G, \quad (8.97)$$

が得られる. ここで,  $G$  はいくつかの強制項の結合である. この方程式は, 式 (8.86) の無次元形式に式 (8.91) を代入することによって最も簡単に導かれる.

原則的には, 上の方程式系はほとんど任意の強制に対する問題を解く手段を与える. 方程式系は定数係数を持ち,  $x$  方向には調和関数の重ね合わせによって, 放物柱関数によって与えられる  $y$  方向の変化と合わせて解くことができる. 一般的にこの手順は幾分退屈で形式的でないだろう. したがって, たくさんの計算によって窒息してしまうことを避けるためにいくつか特別な場合を考える. 熱狂者は自分で一般的な発展を続けるだろう. (簡単化された場合の解を見つけるための, もしくは一般的な関係を見つけるための解析手法を用いることと関連して, 複雑な方程式系に対する解を見つけるための数値解法を用いる方法によって現代の地球流体力学は発展してきた.) 8.5 節と 22.7 節で, 後に二つの特に重要な問題を議論していく. そしてこの節の残りでは強制波について一般的なコメントをすることで満足していく.

### 8.4.2 強制波

強制項のいくつかは残しておいて減衰を無視するような強制波を考えよう. 目的はどのような波が存在するかを示し, 式 (8.94) から (8.97) の解釈を補助することである.  $\alpha = 0$  のとき有次元の形式で,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + (2n+1) \frac{\beta}{c} v_n \right] - \beta \frac{\partial v_n}{\partial x} = G, \quad (8.98)$$

となる. 式 (8.98) から,  $G = 0$  とし  $\exp(ikx - i\omega t)$  の形式の調和関数を見つけるならば, 自由波に対する分散関係式, つまり式 (8.37) が導かれる.

今, 強制  $\tilde{F}$  を考える. これは一定のゼロ次オーダーの放物線関数  $D_0$  にのみ向けられている (?). 方程式 (8.94a) は有次元の形式で,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) q_0 = \tilde{G}, \quad (8.99)$$

となる. この自由解は, 存在してであろう各  $k$  に対する速度  $c = \omega/k$  で東に進行するケルビン波である. つまり,  $q_0 = \Re C \exp [ik(x - ct)]$  であり, ここで  $C$  は

<sup>\*16</sup>これらの方程式系の導出ができない...

一定である。強制は  $x$  方向と時間に調和的であると仮定すると、

$$\tilde{F} = \Re A \exp \{ \exp [i(k_1 x - \omega_1 t)] + \exp [i(k_1 x + \omega_1 t)] \} = A [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_1 x + \omega_1 t)], \quad (8.100)$$

であり、 $A$  は実数である。この強制をもつ式 (8.99) の解は、

$$q_0 = -\frac{A \sin(k_1 x - \omega_1 t)}{\omega_1 - ck_1} + \frac{A \sin(k_1 x + \omega_1 t)}{\omega_1 + ck_1}, \quad (8.101)$$

で与えられる。上の方程式中のすべてのパラメータ  $c$ ,  $k_1$ ,  $\omega_1$  は正である。もし強制が単に一つの調和関数であるならば、そのとき一般的に  $c \neq \omega_1/k_1$  である。けれども、もし強制が多くの調和関数の重ね合わせであるならば、そのとき自由モードに共鳴するものがあるだろうし、この波、つまり式 (8.101) の右辺第一項のような表現で示されるような東進ケルビン波、が優先的に存在するだろう (?). よく似た考えが他の波についても当てはまる。つまり、強制は、強制と非常に似ていて強制と共鳴できるような波を励起するだろう。時々、強制は空間についても時間についてもデルタ関数と似ている。つまり例えば強い嵐の活動による瞬間的で局所的な海上風が突発することによってすべての空間スケールと時間スケールをほとんど含むような強制を引き起こす。なぜならディラックのデルタ関数は全てのフーリエモードが等しい表現をもつからである。この場合、東進ケルビン波と西進惑星波の両方が存在し、これらのいくつかを見るために、今議論したように長波近似をすることが有用である。

### 惑星波に関する再考

惑星波や長波の近似において、式 (8.98) の高次の時間微分を省略し、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - (2n+1) \frac{\beta}{c} v_n \right] + \beta \frac{\partial v_n}{\partial x} = G, \quad (8.102)$$

を残す。もし  $G = 0$  ならば、式 (8.47) にあるように、この方程式は分散関係式、

$$\omega = \frac{-\beta k}{(2n+1)\beta/c + k^2}, \quad (8.103)$$

を得る。強制そのものが低振動数をもつときに惑星波が存在する。

### 長波近似に関する再考

低緯度における多くの状況は、南北スケールよりも長い東西スケールをもつことによって特徴づけられる。したがって  $|\partial\phi/\partial y| \gg |\partial\phi/\partial x|$  である。この場合、

強制と散逸が存在していても東西流に対しては地衡流平衡が良い近似として満たされるが、南北流に対しては満たされず、良い近似として南北方向の運動方程式 (8.84b) は、

$$fu = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad (8.104)$$

に置き換わる。この極限において式 (8.98) は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ (2n+1) \frac{\beta}{c} v_n \right] - \beta \frac{\partial v_n}{\partial x} = G, \quad (8.105)$$

と簡単化され、この式から  $G = 0$  であるならば、分散関係式、

$$\omega = \frac{-kc}{2n+1}, \quad (8.106)$$

がすぐに導かれる。この式は、式 (8.103) で  $k$  が小さい極限にあるものであり、波は非分散性である。 $n = -1$  のとき東進ケルビン波をもち、 $n \geq 0$  のとき西進ロスビー波をもつ。

それから振幅方程式 (8.94) から (8.96) は、 $\alpha = 0$  とすることでも、以下のように簡単化される。 $q$  に対する方程式は、

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + \frac{\partial q_0}{\partial x} = F_0^x - Q_0, \quad (8.107a)$$

$$\frac{\partial q_{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial q_{n+1}}{\partial x} - v_n = F_{n+1}^x - Q_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (8.107b)$$

となる。 $r$  に対する方程式は、

$$\frac{\partial r_{n-1}}{\partial t} + \frac{\partial r_{n-1}}{\partial x} + nv_n = -(F_{n-1}^x + Q_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.108)$$

となり、 $v$  に対する方程式 (地衡流平衡) から、

$$q_1 = 0, \quad (8.109a)$$

$$(n+1)q_{n+1} = r_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.109b)$$

とわかる。もし式 (8.109b) を用いて式 (8.108) にある  $r_{n-1}$  を消去し、それから式 (8.107b) を用いて  $v_n$  を消去するならば、

$$(2n+1) \frac{\partial q_{n+1}}{\partial t} - \frac{\partial q_{n+1}}{\partial x} = n(F_{n+1}^x - Q_{n+1}) - (F_{n-1}^x + Q_{n-1}), \quad (8.110)$$

を得る。上の方程式の組は原則的に、海の上を吹く風や大気中の熱源のような外力に対する系の応答を調べるための手段を与える。散逸を無視すると、強制が安定しているというよりもむしろ振動している場合にのみ、一定の振幅をもつ波型の解が見つかるだろう。 $q_n$  に対する一次の波動方程式 (8.107a) と (8.110) を解き、それから式 (8.109b) を用いて  $r_n$  を得ることで解が見つかる。式 (8.107b) と (8.110) を加えると  $v_n$  に対する一つの簡単な表現が得られる。

## 波と調節

式 (8.107a) で示される波はケルビン波であり, 無次元速度 1 もしくは有次元速度  $c$  で東へ移動する.  $n = -1$  の分散関係式  $\omega = -kc/(2n + 1)$  から速度が導かれる. 対照的に, 式 (8.110) で示される波は西へ伝播する, 低振動数の惑星長波である. 有次元形式で式 (8.110) は,

$$(2n + 1) \frac{\partial q_{n+1}}{\partial t} - c \frac{\partial q_{n+1}}{\partial x} = n(F_{n+1}^x - Q_{n+1}) - (F_{n-1}^x + Q_{n-1}), \quad (8.111)$$

となり, よってちょうど式 (8.50) のように波は速度  $-c/(2n + 1)$  をもつ. この近似においては低振動数の短波はない.

上で注意したように, 一般に任意の強制は重力波と惑星波の両方を励起し, 初期の流れは地衡流平衡から外れていく. 中緯度の場合 (3.9 節) において重力波は (理想化された問題においては) 無限大へ発散し, 低緯度において低効率で調節された流れを残す. なぜなら, 波はそれらの慣性緯度 (8.3 節) の間に捕捉され, 散逸がないと, 流体はずっと振動していくからである. 東西方向には惑星波とケルビン波の両方が伝播する. 重力波の前線はより速く遠くに移動し, 惑星波の方法で最終的な調節を起こす.

今, さらに具体的な問題, つまり局所的な熱強制に対する定常な応答の問題, に目を移そう.

## 8.5 強制定常流れ: Matsuno-Gill 問題

今, 赤道波問題の中でも強制定常流れについて考える. つまり, 式 (8.84) の定常解を調べるが, 右辺には数学的もしくは熱的な強制をもつ<sup>\*17</sup>. 大気 of 熱帯循環に対するその重要性のために, この問題は幾分か象徴的となり, この章のここから読み始めようとする読者がいるかもしれない. けれども, この問題は 8.2 節と 8.4 節で学んだ波の問題を本当に強制で定常な流れにただ着目したものであり, 読者はこの節を読み進める前に少なくともその題材にすでに親しみをもっておくべきである. これまでの節を詳細に勉強した読者は以下の内容, つまり *Matsuno-Gill* 問題がわかるだろう.

---

<sup>\*17</sup>[原文脚注 11]

### 8.5.1 数学的な展開

式 (8.84) から始め, 二つの簡単化を追加する. 一つ, 流れは定常である, 二つ, 東西風は南北方向の圧力勾配と地衡流平衡下にある. この ‘半地衡流’ 近似は, これまでの節で議論された長波近似と似ており,  $\alpha v$  が  $fu$  より小さいことを必要とする. 運動方程式は,

$$\alpha u - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = F^x, \quad fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \alpha \phi + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -Q, \quad (8.112a,b,c)$$

となる. これらの方程式系から  $v$  に対する一本の方程式, つまり,

$$\frac{f^2}{c^2} \alpha v - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{f}{c^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{f}{c^2} \alpha F^x + \frac{\partial^2 F^x}{\partial x \partial y}, \quad (8.113)$$

を導くことができる<sup>\*18</sup>. これは, 式 (8.84) から地衡流平衡下の東西風をもつ定常な系に対して適切な簡単化であり, 全ての時間微分,  $\alpha^3$  を含む項, そして右辺の  $F^y$  の項を除くことで得られる. 以下の時間スケールと長さスケールを用いて全ての変数を無次元化する:

$$T_{eq} = (2c\beta)^{-1/2}, \quad L_{eq} = \left( \frac{c}{2\beta} \right)^{1/2}. \quad (8.114a,b)$$

その結果, 様々な有次元変数と無次元変数 (ハットつき) が,

$$\begin{aligned} (u, v) &= c(\hat{u}, \hat{v}), \quad \phi = c^2 \hat{\phi}, \quad (x, y) = L_{eq}(\hat{x}, \hat{y}), \\ \alpha &= \frac{\hat{\alpha}}{T_{eq}}, \quad Q = \frac{c^3}{L_{eq}} \hat{Q}, \quad F^x = \frac{c^2}{L_{eq}} \hat{F}^x, \quad \hat{f} = \frac{1}{2} \hat{y}, \quad \hat{\beta} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (8.115)$$

によって関係づけられる. 特別に注意しない限り, 今後, 変数は無次元であるとし, ハットを落とす. 運動方程式 (8.112) は,

$$\alpha u - \frac{y}{2} v + \frac{\partial \phi}{\partial x} = F^x, \quad \frac{y}{2} u + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \alpha \phi + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -Q, \quad (8.116a,b,c)$$

となり,  $v$  に対する方程式は,

$$\frac{y^2}{4} \alpha v - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{y}{2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\alpha y}{2} \alpha F^x + \frac{\partial^2 F^x}{\partial x \partial y}, \quad (8.117)$$

となる. これまで通り波のような問題を扱うときは, 変数を  $q$  と  $r$  に変えることが便利である. ここで,

$$q = \phi + u, \quad r = \phi - u, \quad (8.118a,b)$$

<sup>\*18</sup>導出は付録 C 参照.

である. これを用いて, 運動方程式 (8.116) は,

$$\begin{aligned} \alpha q + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2}yv = F^x - Q, \quad \alpha r - \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}yv = -F^x - Q, \\ \frac{y}{4}(q - r) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(q + r) = 0, \end{aligned} \quad (8.119a,b,c)$$

となる. これらは式 (8.90) の特別な場合であり, 初めの二本の方程式は  $u$  の運動方程式と圧力方程式の組み合わせであり, 最後の方程式は  $v$  の運動方程式 (水平方向の地衡流平衡) である. 一般的な取り扱いにおいて早めに放物柱関数を用いて変数と強制を級数展開する. したがって, 例えば,

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)D_n(y), \quad (8.120)$$

であり, 他の変数についても同様である. 結果としては一般的な微分方程式は式 (8.94) から (8.97) の特別な場合であり, 具体的には,

$$\alpha q_0 + \frac{\partial q_0}{\partial x} = F_0^x - Q_0, \quad (8.121a)$$

$$\alpha q_{n+1} + \frac{\partial q_{n+1}}{\partial x} - v_n = F_{n+1}^x - Q_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.121b)$$

$$\alpha r_{n-1} - \frac{\partial r_{n-1}}{\partial x} + nv_n = -(F_{n-1}^x + Q_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.122)$$

$$q_1 = 0, \quad (8.123a)$$

$$(n+1)q_{n+1} - r_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.123b)$$

である. 式 (8.121b), (8.122) そして (8.123b) を用いて,

$$\alpha(2n+1)q_{n+1} - \frac{\partial q_{n+1}}{\partial x} = n(F_{n+1}^x - Q_{n+1}) - (F_{n-1}^x + Q_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.124)$$

を得る. 最後にそれを用いることはしないでしようが,  $v$  に対する方程式 (8.113) は,

$$\alpha \left( (2n+1)v_n - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v_n}{\partial x} = G, \quad (8.125)$$

となる. ここで,  $G$  はいくつかの強制項を表す.

波のような場合のように, 上の方程式系は, 少なくとも原則的には任意の特定の強制に対する応答に対する解の導出方法を与える. 手順は, 放物柱関数に強制を向けて, そのとき水平方向の依存性に対する振幅方程式系 (8.121) から (8.123) を解き, 最後に  $q_n(x)$ ,  $r_n(x)$ ,  $v_n(x)$  そして放物柱関数を用いて解を再構築することである. 十分に当然なことだが, これは実行するよりも言うほうが簡単であり, ただ一つの重要な場合に対して詳細に手順を踏むことにしよう.



### 8.5.2 対称的な加熱

標準的な場合は,  $x$  方向にも  $y$  方向にも制限され, 赤道に跨って対称的な加熱によって系が強制される場合である.  $y$  方向の制限は, 加熱は単に最初の放物柱関数に向いている, よって,

$$Q(x) = Q_0(x)D_0(y) = G(x) \exp(-y^2/4), \quad (8.126)$$

であると仮定することで達成され,  $x$  方向の制限は, 加熱が以下の形式で書けることを仮定することで達成される:

$$G(x) = \begin{cases} A \cos kx, & |x| < L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases} \quad (8.127)$$

ここで,  $k = \pi/2L$  である. これを選ぶには奇妙な形式であるようだけれども,  $|x| < L$  に対して調和的に変化することでその領域に解析解が見つかり, 離れた場ではあらゆる強制がないために, そこでは減衰する波のような擾乱の形式で解が見つかる. この問題は明らかに特別な場合であるけれども, 解の定量的な形式はその正確な詳細を凌ぐ.

#### ケルビン波の寄与

8.4.2 節において  $q_0$  に対する方程式は東へ進行するケルビン波を表すことを注意したが, このことは減衰の場合にも満たされる. つまり, 強制される領域とそこから東側 (ここで, だんだんと減衰していくだろう) でのみで式 (8.121) のゼロでない解があるだろう. この考察を用いて, 全ての (三つの) 領域における解を簡単に導出することができる. 始めに  $x < -L$  に対しては,

$$q_0 = 0, \quad x < -L, \quad (8.128a)$$

である. 強制の領域内においては,  $x = -L$  において  $q_0 = 0$  の境界条件を用いて式 (8.121) を解く必要がある. 解は,

$$q_0 = \frac{-A}{\alpha^2 + k^2} \left\{ \alpha \cos kx + k [\sin kx + e^{-\alpha(x+L)}] \right\}, \quad |x| < L, \quad (8.128b)$$

である<sup>\*19</sup>.  $x > L$  に対しては, 式 (8.121) を解くが, 右辺がゼロであることと, 式 (8.128b) で与えられる  $x = L$  での境界条件, つまり,  $q_0 = -Ak(\alpha^2 + k^2)^{-1} [1 + \exp(-2\alpha L)]$  であることを用いる. 解は,

$$q_0 = \frac{-Ak}{\alpha^2 + k^2} (1 + e^{-2\alpha L}) e^{\alpha(L-x)}, \quad x > L, \quad (8.128c)$$

<sup>\*19</sup>導出は付録 C を見よ.

である.

運動は減衰するケルビン波であるから,  $v = 0$  であり, 無次元の  $u$  と  $\phi$  の場はそれぞれ等しく  $r = 0$  である. したがって, 式 (8.118) と (8.128) から,

$$u = \phi = \frac{1}{2}q_0(x) \exp(-y^2/4), \quad v = 0, \quad (8.129)$$

である. これは  $r_0$  がゼロであることを意味しているわけではない. むしろ, それは以下で議論されるロスビー波と関係がある. 鉛直速度は,

$$w = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \alpha\phi + Q, \quad (8.130)$$

から再構築でき, よって,

$$w = \frac{1}{2}[\alpha q_0(x) + Q_0(x)] \exp(-y^2/4), \quad (8.131)$$

である. 今, ロスビー波の寄与を見つけることで, 解が完成する.

### ロスビー波の寄与

今  $q_2$  と  $r_0$  に関係される解を見つける. 式 (8.124) から,

$$\frac{dq_2}{dx} - 3\alpha q_2 = Q_0, \quad (8.132a)$$

である. 式 (8.123b) と (8.121b) から,

$$r_0 = 2q_2, \quad v_1 = \alpha q_2 + \frac{dq_2}{dx}, \quad (8.132b,c)$$

を得る. これらは有次元の速度  $c/(2n+1) = c/3$  で西へ進行するロスビー波である. したがって, 東へ伝わる信号はなく, ケルビン波問題に対する解を見つけた方法と似たやり方によって上の方程式系の解を見つけることができる. 簡単な計算を少し実行後, 解は以下の通りであるとわかる:

$$q_2 = 0, \quad x > L, \quad (8.133a)$$

$$q_2 = \frac{A}{(3\alpha)^2 + k^2} [-3\alpha \cos kx + k (\sin kx - e^{3\alpha(x-L)})], \quad |x| < L, \quad (8.133b)$$

$$q_2 = \frac{-Ak}{(3\alpha)^2 + k^2} [1 + e^{-6\alpha L}] e^{3\alpha(x+L)}, \quad x < -L. \quad (8.133c)$$

圧力場と速度場に対する一致解は以下の通り:

$$u = \frac{e^{-y^2/4}}{2} q_2(x)(y^2 - 3), \quad v = ye^{-y^2/4} [Q_0(x) + 4\alpha q_2(x)], \quad (8.134a,b)$$

$$\phi = \frac{e^{-y^2/4}}{2} q_2(x)(1 + y^2), \quad w = \frac{e^{-y^2/4}}{2} [Q_0(x) + \alpha q_2(x)(1 + y^2)]. \quad (8.135a,b)$$

依然として解は解釈に従うけれども, それらは複雑に思われる (実際複雑である!). しかし初めにケルビン波とロスビー波の寄与を結合し, 次元を戻すと,

$$u = \frac{c}{2} [q_0(x) + q_2(x)(2\beta y^2/c - 3)] e^{-\beta y^2/2c}, \quad (8.136a)$$

$$v = cy [Q_0(x) + (4\alpha/c)q_2(x)] e^{-\beta y^2/2c}, \quad (8.136b)$$

$$\phi = \frac{c^2}{2} [q_0(x) + q_2(x)(2\beta y^2/c + 1)] e^{-\beta y^2/2c}, \quad (8.136c)$$

$$w = w_0 \frac{e^{-\beta y^2/2c}}{2} [2Q_0(x) + \alpha q_0(x) + \alpha q_2(x)(1 + 2\beta y^2/c)], \quad (8.136d)$$

を得る. ここで,  $w_0 = (2c\beta)^{1/2}H$  であり,  $q_0, q_2$  そして  $Q_0$  は依然として無次元の関数である.  $w_0 = c = 1$  と  $\beta = 1/2$  とすることによって, 無次元の形式に戻される. 上記の解は, 我々が選んだ強制関数の形式に特有のものである. けれども, 原則的によく似た方法論が, 運動方程式中の強制を含む, 任意の形式の強制に適用され得る. 方程式系が線形であるから解は重ね合わせ可能である. 上の解は局所加熱に対して物理的に重要な場合であり, 遠くの場の全体構造は強制の詳細にはほとんど依存しない. つまり, 強制の西部と極方向には急速に減衰する擾乱があり, 赤道付近の強制の東部にはよりゆっくりと減衰する擾乱がある (図 8.11).

## 解釈

今, 起きていることを理解してみよう. 解は図 8.11 に描かれている. 加熱は  $-2 < x < 2$  の領域に制限され, 赤道から離れると 2 の e-folding 距離をもって指数関数的に減少し, 直感的に予測され以下で議論されるように, 図の右下にある鉛直速度の領域と多少一致する.

始めに強制領域内の流れを考えよう. そこでは鉛直速度は正であり, 関連する水平収束は東西流のものである. つまり, 南北方向の流れは極向きであり, 加熱の最大値から離れていく. このことを理解するために,  $\alpha \rightarrow 0$  の極限を考えよう. 式 (8.136) から鉛直速度場は加熱と一致し, (無次元の) 南北方向の速度は,

$$v = yQ_0 \exp(-y^2/4) = yw, \quad (8.132)$$

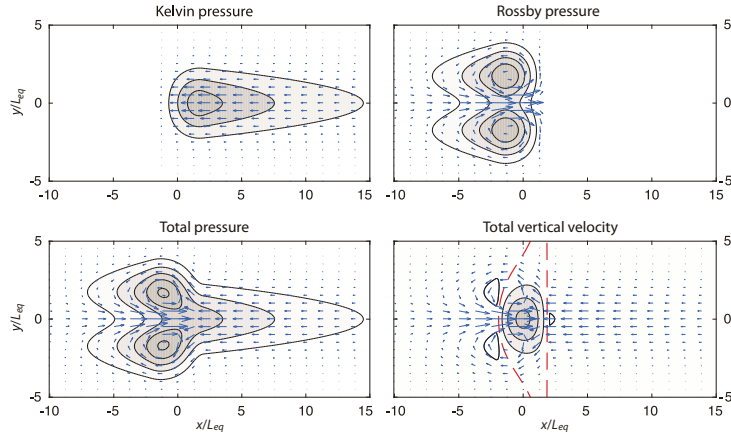


Fig. 8.11

図 8.11: Matsuno-Gill モデルの無次元解. 原点付近に加熱をもち,  $L = 2$  と  $\alpha = 0.1$  を用いた式 (8.127) によって与えられる. 影付きのコンターは指定された場を示し, 矢印は関連する水平速度を示す. ‘ケルビン’ と ‘ロスビー’ の指定はそれぞれ, 単に式 (8.129)-(8.131) と式 (8.134)-(8.135) によって与えられるようなケルビン波とロスビー (惑星) 波の寄与がプロットされることを示す. 圧力場に対してはコンターの間隔が 0.3 であり, 全ての場は負 (よって暗い影付きは低圧力) であり, ゼロコンターは省略される. 鉛直速度に対しては, コンターの間隔が 0.3 で  $-0.1$  から始まる. よって  $-0.1, 0.2, 0.5$  であり, 追加のゼロコンター (赤い破線) はその範囲内の上向き運動をもつ (?).

で与えられる. したがって, 鉛直方向の運動は極方向の運動と関係づけられる. このことを理解するために, 非粘性の渦度方程式,

$$\beta v + f \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{or} \quad \beta v = fw, \quad (8.138a,b)$$

を考えよう. この式は無次元形式で,

$$v + y \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{or} \quad v = yw, \quad (8.139a,b)$$

である. 明らかだが, 式 (8.137) と (8.139b) は等価である. このことについて考えるためのもう一つの方法は, 4 章で議論したように強制領域で起こる運動が渦の伸縮を引き起こし, ゆえに周期的な鉛直渦度の生成と極向きの移動が起きることに注意することである (?). そのときポテンシャル渦度の観点から, 流れが断熱である程度では物理量  $(f + \zeta)/h$  が流れに沿って収束する. 加熱が  $h$  の値 (伸縮) を増加させ, よって  $f + \zeta$  の大きさもまた増加する傾向をもつ. 流れは, その相対渦度を単独で増加させるよりもその  $f$  の値を増加させるために極方向に移動するほうが簡単であり, 後者に対してはより多くのエネルギーを必要とする. もしこれらの方程式系を二層系の下層と解釈するならば, そのとき下層の流れはソースから離れており, 上層ではソースに向かっている.

今,  $q_2(x)$  の関連する, 加熱の西部にある流れを考えよう. そこでは西へ減衰伝播するロスビー波, 19 章でも取り扱うであろう ‘ロスビープリューム’ の形式 (原文

754 ページの図 19.14 とそれに関連する議論を見よ), によって擾乱が生成される. 鉛直速度は負であり, 水平速度はほとんど地衡流平衡にある. つまり, 圧力擾乱はどこでも負であり, よって加熱のちょうど西にある低圧の中心の周りをくるくると循環する. 赤道への流れの収束は, 赤道に沿う東向きの流れを生成し, 加熱領域において収束する. 強制領域内において行ったように, 非粘性渦度方程式を用いることでこのことを解釈しようとする. このことが示すことは, 強制から離れると, そのとき, 式 (8.138) から流れは発散 ( $\nabla \cdot \mathbf{u} > 0$ ,  $w < 0$ ) であるから, 両半球において南北方向の速度は赤道向きであるべきである. けれども, この説明は高々定性的なものである. なぜなら, 上の渦度方程式は解 (8.136) を正確に満足しないからである<sup>\*20</sup>. この理由は, ゼロでない解は, 強制領域から離れると, 散逸の存在に完全に依存するからである.

強制領域の東にある流れは東に伝播するケルビン波, もしくはより正確には定常で東へ減衰するケルビン波の類, によって誘導される. 明らかなことだが, 図 8.11 から圧力場はソースの西よりもソースの東のさらに遠くに伸びており, これはケルビン波がロスビー波よりもゆっくりと減衰するためである. 時間微分と減衰の両方を保つと, 式 (8.94) から非強制的ケルビン波は,

$$\left[ \alpha + \frac{\partial}{\partial t} \right] q_0 + \frac{\partial q_0}{\partial x} = 0, \quad (8.140)$$

を満たし, 一方で  $n = 1$  に対する式 (8.110) と (8.124) から非強制的ロスビー波は,

$$3 \left[ \alpha + \frac{\partial}{\partial t} \right] q_1 - \frac{\partial q_1}{\partial x} = 0, \quad (8.141)$$

を満たす. したがって, ロスビー波の有効減衰率はケルビン波のものの 3 倍である. もう一つの方法を考えると, ケルビン波はロスビー波の 3 倍速く進行し, よって減衰率  $\alpha$  が同じならケルビン波の影響は東へ 3 倍遠くに広がる. ケルビン波の水平速度は単に東西方向であり, 表面付近で熱源に向かっている.

### 鉛直構造

解の水平構造は, 赤道上の太平洋におけるウォーカー循環の粗末な描像である. ここでは海表面温度はインドネシア付近の西部で高く, 南アメリカ付近の東部では低い. これは深く冷たい水を表面へ持っていく湧昇によるものである. このような海表面温度分布は効率的に太平洋西部で加熱を与え, 赤道に沿って西向きの風を誘導し, すでに大循環の一部として存在する西向きの貿易風を強める. 黄道面と子午面における (転倒) 循環が図 8.12 に描かれている. 3.4 節で議論したように, 場が

<sup>\*20</sup>原文には, (8.138) とあるが (8.136) であると思われる.

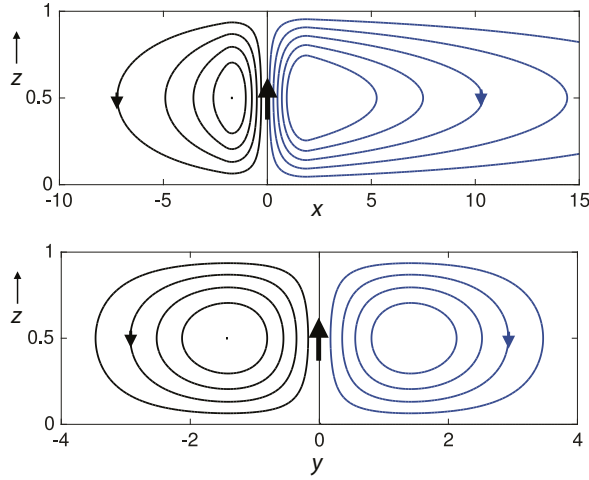


Fig. 8.12

図 8.12: 図 8.11 と同様に  $y = 0$  と  $x = 0$  に最大値をもつ対称な加熱をもつ Matsuno-Gill 問題における, 南北方向に平均した流れの東西方向の (転倒) 流線関数 (上図) と, 東西方向に平均した流れの南北方向の (転倒) 流線関数 (下図). 加熱の位置の周りで上昇する運動があり, それ以外で下降している. 上図のコンターの間隔は下図のもの約 4 倍である. つまり, ここではハドレー循環よりもウォーカー循環が強い.

最初の鉛直モードを示すことを支持することによってこの解が得られる. もし成層が一様ならば, そのときモードは単にサイン型とコサイン型であり, よって,

$$(u, v, \phi) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi}) \cos(\pi z/D), \quad w = \tilde{w} \sin(\pi z/D), \quad (8.142)$$

である. 今, 質量連続の式の様式 (3.66) は,  $\tilde{w} = -(c^2/g)\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}$  である. もしこの式がいつもの形  $\partial w/\partial z = -\nabla \cdot \mathbf{u}$  と整合的であれば, そのとき  $\pi/D = g/c^2 = 1/H_1^*$  の関係をとる. ここで  $H_1^*$  は最初のモードの相当深さである. この鉛直構造が与えられると, 解を南北方向に積分し, よって流線関数が定義できる (なぜなら  $y \rightarrow \pm\infty$  のときに  $v = 0$  であり, よって  $\partial \bar{u}^y/\partial x + \partial \bar{w}^y/\partial z = 0$  であるからであり, バーは南北方向の積分を示す). 南北方向の積分に対する表現はこの章の付録 B で与えられ, 流線関数は式 (8.175) と (8.176) で与えられる.

### 8.5.3 非対称な強制

非対称な強制をもつ解析解が, これまで通り東西方向の局在化の同じ形式を用いて,

$$Q(x, y) = Q_1(x)D_1(y) = y \cos kx \exp(-y^2/4), \quad (8.143)$$

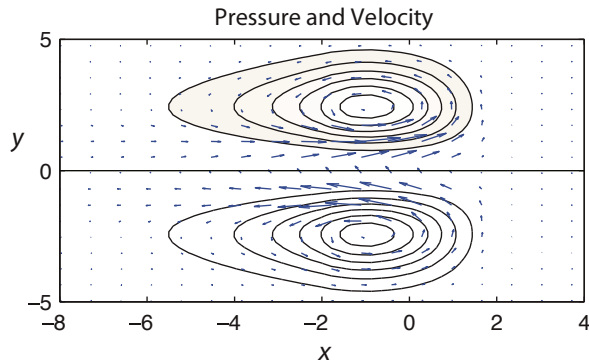


Fig. 8.13

図 8.13: 式 (8.143) で与えられる非対称な加熱と無次元減衰係数  $\alpha = 0.1$  をもつ Matsuno-Gill 問題における圧力 (コンター) と水平速度 (矢印). 加熱は, 北半球においては低圧領域 (影付き) を生成して, 流入と上昇をもち, 南半球において冷却がある. コンターの間隔は 0.3 であり, ゼロコンターは  $y = 0$  に沿う.

の形式の強制を用いることで得られる. 解を得るために必要な計算は幾分か退屈なものであるが素直であり, 上で示したようなものと非常によく似た性質をもつ. 再び応答に対する二つの部分があるとわかる. 一つ部分は  $n = 1$  の惑星長波と一致し, 式 (8.121)-(8.123) を用いて,

$$q_1 = 0, \quad v_0 = Q_1, \quad (8.144)$$

とわかる. 混合した長波は伝播速度ゼロであるから強制の外側では応答がない. 解の他の部分は再び式 (8.121)-(8.123) を用いることで,

$$v_2 = \frac{dq_3}{dx} + \alpha q_3, \quad r_1 = 3q_3, \quad \frac{dq_3}{dx} - 5\alpha q_3 = Q_1, \quad (8.145a,b,c)$$

より得られる. これらの方程式系の解は読者の演習のために残しておくが, 解は図 8.13 に示される. 強制領域の東部で解はゼロである. なぜならそのように伝播する長波がないからである. 先ほど示された理由に対する極方向の流れの傾向と同様, 強制領域の西部では北半球において (加熱されており) 熱源への流入がある. したがって, 図 8.13 に示されるように, 主な熱源の幾分か西で上向きの運動をもつ低気圧があり, 冷却された領域にたおいて一致する高気圧がある. 東西平均された解 (示されていない) は非対称なハドレーセルと似ており, 北 (夏) 半球において空気が上昇し, 下降する前に冬半球の中へ南に向かって上へ移動する.

### 8.5.4 他の強制

他の強制係数や強制係数の重ね合わせを用いることによって、より一般的な強制に対する解を構築することができ、熱帯の大気海洋に対する興味のある多くの解もまた構築することができる。平衡下にある時間ステップ線形浅水方程式系と、標準的なテクニックを用いて楕円方程式 (8.113) を解くことのどちらか一方によって数値的に解を (時々より簡単に) 構築することもできる。<sup>\*21</sup> 我々は以下の二つの場合に対する解を示していく: (i) 北半球に赤道の中心から離れた熱源 (ii) 赤道を中心とするか単に赤道より北にあるかのどちらか一方の線状熱源で、熱帯収束帯 (ITCZ) を模倣する。

#### 赤道から離れた加熱

上で示した非対称な加熱と対称な加熱を足し合わせることで赤道から離れた加熱に対する解を構築することができる。図 8.14 では、図 8.11 で示される対称な加熱の解とよく似た形式だが、 $y = 1$  と  $y = 2$  において赤道から離れた加熱をもつ解を示す。加熱のちょうど西にある低圧領域 (その範囲内では収束と上向きの運動がある) と、赤道と加熱の中心の間にある東向きの流入によってパターンが支配されている。 $y = 1$  を中心とする加熱をもつ解においては、加熱領域の東にも応答があり、赤道で最大であり、これは東に伝播し減衰するケルビン波によって生成される。(図 8.14 の右図では) 加熱が赤道から遠くに移動すると、圧力の応答はより強くなるが、加熱まわりの流れはほとんど地衡流平衡下にある。

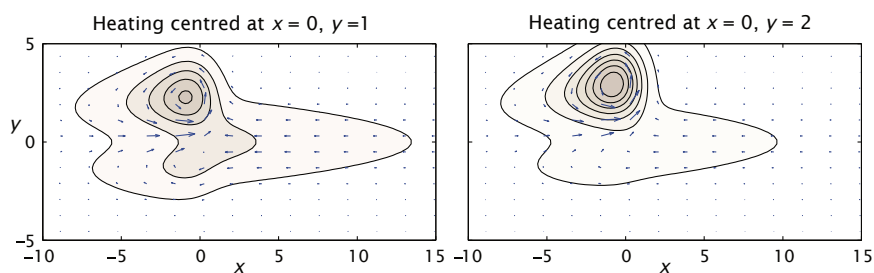


Fig. 8.14

図 8.14: 赤道から離れたところに中心がある加熱をもつがその他は図 8.11 と似ている場合の Matsuno-Gill モデルの圧力 (コンター) と水平速度 (矢印). 加熱がより高緯度へ移動すると、ケルビン波の応答が弱くなるが、局所的な応答の大きさは増加する (両図においてコンターの間隔は同じ).

<sup>\*21</sup>[原文脚注 12]



### 線状加熱

最後に、加熱が  $x$  に依存しないときの解を考えよう。そのとき解そのものは  $x$  に依存しない。赤道上と  $y = 1$  における線状加熱に対する解が図 8.15 と図 8.16 に示されている。上で注意したように、これらの解は、(現実の ITCZ では収束帯の位置が全体の流れに対する解の部分として決まるけれども) ITCZ のむしろ理想化されたものと考えられよう。

はじめに赤道上の加熱をもつ解を考えよう。加熱にわたって低圧領域が発達し、そこで流れが収束し、赤道向き東向きの‘貿易風’を生成し、結果として生じる赤道上の上向き運動を生成する。赤道において実際に東西速度が急速に減少する。今、加熱が赤道から離れるときに起きることを考えよう。一般的に実際の ITCZ は赤道よりすこし北部、特に太平洋に位置していることを注意する。低圧領域が線状加熱に沿って形成され、そこでは南北速度が急に収束し、(図 8.15 と図 8.16 の両方の右図に見られるように) よりたくさんの流入が線状加熱の赤道側から来る。東西速度に関しては、線状加熱に沿って東向き的高速風があり、一方の側に対して西向きの流れがある。つまり、線状の急な加熱によって起こる東向きの貿易風の分裂する。

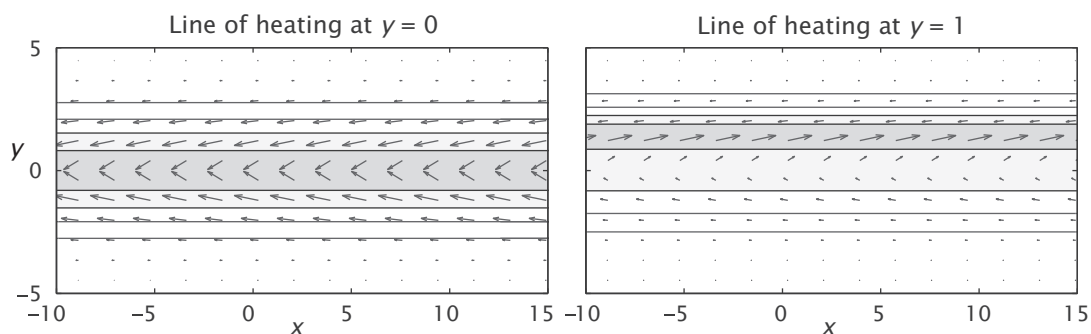


Fig. 8.15

図 8.15: 図 8.14 と同様だが, 赤道上 (左図) と  $y = 1$  (右図) における線状加熱をもつ. 加熱は低圧 (影付き) を生成し, そこで流れが収束する. 右図では, 線の赤道側の南北速度が極側の南北速度より大きい. 図 8.16 も見よ.

v

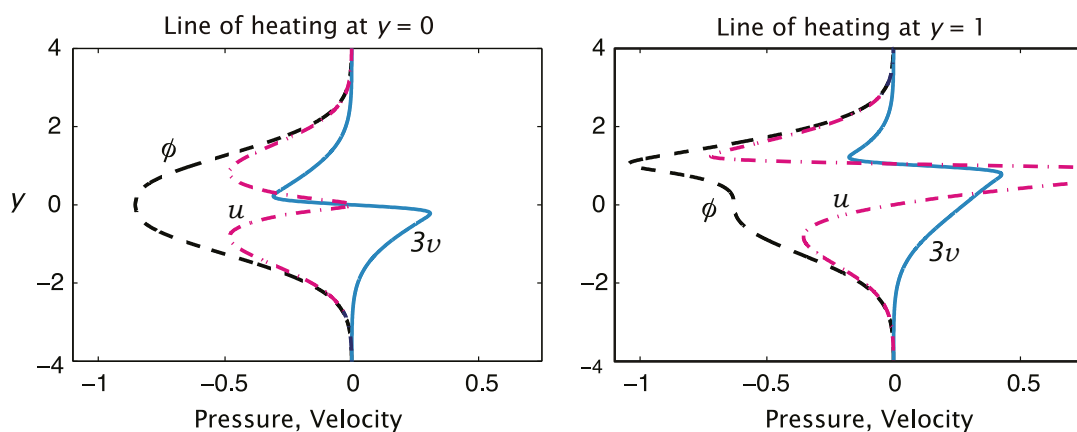


Fig. 8.16

図 8.16: 図 8.15 と対応しているが, 圧力  $\phi$ , 東西速度  $u$  そして (説明のため) 三倍の南北速度  $v$  の分布のプロットを示す. 左図は赤道上の線状加熱に対するもので, 右図は  $y = 1$  における線状加熱に対するものである. 加熱は低圧を生成し, そこで流れが収束する. 右図においては線の赤道側の南北速度が極側の南北速度より大きい.

## 付録 A: 無次元化と放物柱関数

この付録ではこの章で様々な分散関係式を導出するために用いられた無次元化と、それに関連するエルミート多項式と放物柱関数の特性のいくつかに関する簡潔な議論を与える。証明と詳細な導出はしない。<sup>\*22</sup>

赤道波やどれらの安定なものの議論においては、二つのわずかに異なる無次元化のうち一つがしばしば用いられる。それらによって二つのわずかに異なる形式の放物柱関数の利用を導く。それらは本質的には等価であるが、一方は設定に依存している他方よりも便利であろう。定義なしで式 (8.28), つまり,

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dy^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{\beta k}{\omega} - \frac{\beta^2 y^2}{c^2} \right) \tilde{v} = 0, \quad (8.146)$$

から始める。もし,

$$T_{eq} = (c\beta)^{-1/2}, \quad L_{eq} = (c/\beta)^{1/2}, \quad (8.147a,b)$$

を用いて時間と距離を無次元化するならば,

$$\frac{d^2v}{d\hat{y}^2} + \left( \hat{\omega}^2 - \hat{k}^2 - \frac{\hat{k}}{\hat{\omega}} - \hat{y}^2 \right) v = 0, \quad (8.148)$$

を得る。代用,

$$v(\hat{y}) = \Psi(\hat{y})e^{-\hat{y}^2/2}, \quad (8.149)$$

は,

$$\frac{d^2\Psi}{d\hat{y}^2} - 2\hat{y}\frac{d\Psi}{d\hat{y}} + \lambda\Psi = 0, \quad (8.150)$$

を導く。ここで  $\lambda = \hat{\omega}^2 - \hat{k}^2 - \hat{k}/\hat{\omega} - 1$  である。この式は  $m = 0, 1, 2, \dots$  に対して  $\lambda = 2m$  の場合とその場合にのみ解をもつエルミート方程式であり、分散関係式を与えるのがこの量子化条件である。解はエルミート多項式であり、つまり  $\Psi(\hat{y}) = H_m(\hat{y})$  であり、ここで,

$$(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4) = (1, 2\hat{y}, 4\hat{y}^2 - 2, 8\hat{y}^3 - 12\hat{y}, 16\hat{y}^4 - 48\hat{y}^2 + 12), \quad (8.151)$$

である。ガウシアンが掛けられたエルミート多項式は放物柱関数  $V_m(y)$  の形式である。つまり,

$$V_m(y) = H_m(y) \exp(-y^2/2), \quad (8.152)$$

である。関数  $V_m(y)$  は,

$$\frac{d^2V_m}{dy^2} + (2m + 1 - y^2)V_m = 0, \quad (8.153)$$

<sup>\*22</sup>[原文脚注 13]

を満たす. 放物柱関数の定義に規格化係数を含めることがしばしば有用である. つまり, もし,

$$P_m = \frac{V_m}{\sqrt{2^m m! \sqrt{\pi}}} \quad \text{ならば, そのとき} \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_m P_n = \delta_{mn}, \quad (8.154a,b)$$

である. 直接的な細工によって確かめられるように, これらの放物柱関数の形式はある漸化式, つまり,

$$\frac{dP_m}{dy} = -\frac{(m+1)^{1/2}}{\sqrt{2}} P_{m+1} + \frac{m^{1/2}}{\sqrt{2}} P_{m-1} \quad \text{and} \quad yP_m = \frac{m^{1/2}}{\sqrt{2}} P_{m-1} + \frac{(m+1)^{1/2}}{\sqrt{2}} P_{m+1}, \quad (8.155a,b)$$

もしくは, 等価的に,

$$\frac{dP_m}{dy} + yP_m = (2m)^{1/2} P_{m-1} \quad \text{and} \quad \frac{dP_m}{dy} - yP_m = -\sqrt{2}(m+1)^{1/2} P_{m+1}, \quad (8.156)$$

に従う.  $m=0$  のとき, 漸化式は,

$$\frac{dP_0}{dy} = \frac{-1}{\sqrt{2}} P_1 \quad \text{and} \quad yP_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} P_1, \quad (8.157a,b)$$

である. このような放物柱関数の形式を用いて強制散逸問題を展開すると, 式 (8.93) の代わりにこれらの関係式が用いられた.

式 (8.20) と (8.36) とともに上の関係式が用いられ, 赤道波問題における  $u, v$  そして  $\phi$  間の関係式を得ることができる. 式 (8.20) を用いることで  $v$  と  $u$ , そして  $v$  と  $\phi$  のそれぞれの場合,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta y \frac{\partial v}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - c^{-2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \beta y \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}, \quad (8.158)$$

によって関係づけられ, 無次元形式では  $\beta = c = 1$  である.  $v$  の場合が単位振幅の一つのエルミートモードであると仮定すると,

$$\hat{v}(x, yt) = \tilde{v}(y) e^{i(kx - \omega t)} = P_m(y) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (8.159)$$

を意味する. もし  $u(x, y, t) = \tilde{u}(y) e^{i(kx - \omega t)}$  であるならば, そのとき式 (8.158a) を用いると,

$$\tilde{u} = \frac{-i}{(k^2 - \omega^2)} \left[ \hat{y} \omega P_m - k \frac{dP_m}{d\hat{y}} \right] = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ \frac{m^{1/2} P_{m-1}}{k + \omega} - \frac{(m+1)^{1/2} P_{m+1}}{k - \omega} \right], \quad (8.160)$$

を得る. ここで最も右にある表現は漸化式 (8.155) を用いる. 明らかに, もし  $m$  と  $\tilde{u}$  が奇数 (偶数) ならば, そのとき  $\tilde{u}$  は  $y$  の偶 (奇) 関数である. 高度場  $\tilde{\phi}$  は同様に式 (8.158b) を用いて  $P_m$  と関係づけられ,

$$\tilde{\phi} = \frac{-i}{k^2 - \omega^2 / c^2} \left[ yk P_m + i\omega \frac{dP_m}{dy} \right] = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[ \frac{m^{1/2} P_{m-1}}{k + \omega} + \frac{(m+1)^{1/2} P_{m+1}}{k - \omega} \right], \quad (8.161)$$

を与える. したがって, ある  $m$  に対して  $\phi$  は  $v$  と逆で, 赤道を横切って  $u$  と同じ対称性をもつ.

## 意味

本文で議論したように,  $y$  における最も重要なモードはケルビン波であり, ケルビン波は  $v = 0$  であり,  $u$  と  $\phi$  の場合は赤道と中心として  $P_0$  に対するものと同じように,  $y^2$  で指数関数的に減衰して離れていく. ヤナイ波もしくは混合ロスビー重力波は  $m = 0$  であり,  $v$  の場合は赤道のまわりで偶関数であり, それは非対称モードであることを意味する. 漸化式 (8.157) を用いると, このモードは  $u$  と  $\phi$  において  $P_1$  のモードを生成するだけである. 重要なロスビーモードは  $m = 1$  であり, 式 (8.160) と (8.161) から, これは  $u$  と  $\phi$  において  $m = 0$  と  $m = 2$  のモードを生成する. したがって一般的には赤道を中心とする対称な擾乱は, 東へ伝播するケルビンモードと, ロスビーモードを生成していく. hogehoge.

## 他の放物柱関数

$D_n(y)$  で示される, 他の共通に用いられる放物柱関数の形式は, ガウシアンが掛けられて修正されたエルミート多項式 (8.42) であり, つまり,

$$D_n(y) = G_n(y) \exp(-y^2/4), \quad (8.162)$$

である. そしてこれらの関数は, 以下の無次元化を用いるときに生じる式 (8.39) の解である:

$$T_{eq} = (2c\beta)^{-1/2}, \quad L_{eq} = (c/2\beta)^{1/2}. \quad (8.163a,b)$$

これらの放物柱関数は,

$$\frac{d^2 D_m}{dy^2} + \frac{1}{2} \left( 2m + 1 - \frac{1}{2} y^2 \right) D_m = 0, \quad (8.164)$$

を満たし, この式は時々, ウェーバー差分方程式と呼ばれる. 関数は以下の性質をもつ:

$$\frac{dD_m}{dy} + \frac{1}{2} y D_m = n D_{n-1}, \quad \frac{dD_n}{dy} - \frac{1}{2} y D_n = -D_{n+1}. \quad (8.165a,b)$$

上の二本の方程式が結合され, 式 (8.164) を与え, それらを辺々引くと,

$$D_{n+1} - y D_n + n D_{n-1} = 0, \quad (8.166)$$

とわかる. 式 (8.156) を用いることは等価であるが, これらの特定のはしご演算子の形式が, 強制の定常 (つまり Matsuno-Gill) 問題の発展においてこれらの放物柱関数を便利にする.

## 付録 B: Matsuno-Gill 問題における数学的關係式

ここでは 8.5.2 節で与えられる解のさまざまな東西方向の積分と南北方向の積分を与える. 強制の東西積分は,  $k = \pi/2L$  を用いて,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} Q_0(x)dx = \int_{-L}^L \cos(kx)dx = \frac{4L}{\pi}, \quad (8.167)$$

で与えられる. 様々な  $q$ ,  $r$  そして  $v$  の場の東西積分は以下のように与えられる.  $F_0 = 0$  の式 (8.121) を用いると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha q_0 dx = -[q_0]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} Q_0(x)dx = -I, \quad (8.168)$$

とわかる. 式 (8.132) を用いると  $q_2$ ,  $r_0$  そして  $v_1$  に対する似た結果, すなわち,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (q_0, q_2, r_0, v_1)dx = \left(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{\alpha}{3}\right) \frac{I}{\alpha}, \quad (8.169)$$

を得る. 式 (8.167), (8.169) そして (8.136) の無次元形式を用いることで東西に積分された圧力場と速度場が得られ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u, v, w, \phi)dx = \left(\frac{-y^2}{6\alpha}, \frac{-y}{3}, \frac{2-y^2}{6}, \frac{-4-y^2}{6\alpha}\right) \left(\frac{4L}{\pi}\right) \exp(-y^2/4), \quad (8.170)$$

を与える.

速度場の南北積分も計算できる. このことを実行するために始めに積分,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1, y, y^2) \exp(-y^2/4)dy = (2, 0, 4)\sqrt{\pi}, \quad (8.171)$$

を書き留めておく. これらのうち一番目のものが標準的な結果であり, 二番目のものは対称性を考慮することで導かれ, 三番目のものは部分積分から求まる. 式 (8.171) と, (8.136) の無次元形式を用いると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dy = \sqrt{\pi} [q_0(x) - q_2(x)], \quad \int_{-\infty}^{\infty} v dy = 0, \quad (8.172a,b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w dy = \sqrt{\pi} [\alpha q_0(x) + 3\alpha q_2(x) + 2Q_0(x)], \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi dy = \sqrt{\pi} [q_0(x) + 3q_2(x)], \quad (8.172c,d)$$

を得る.

方程式 (8.170) と (8.172) は有用である. なぜなら, それらは黄道面と子午面における (転倒) 循環に対して, それぞれ流線関数を定義することを許す. 式 (8.170) と (8.172) から, 式 (8.121) と (8.132a) を用いると,

$$\bar{w}^x + \frac{\partial \bar{v}^x}{\partial y} = 0, \quad \bar{w}^y + \frac{\partial \bar{u}^y}{\partial x} = 0, \quad (8.173)$$

とわかる. 上付きバーは説明したように, 東西平均もしくは南北平均を示す. これらの結果は東西積分と南北積分のそれぞれにおいて質量連続の式  $w = -(\partial_x u + \partial_y v)$  から予測できる. しかし, 解がそれを非常に明確に示すという事実は数学の宿命のデモである.

深さ  $H$  の流体において水平速度と鉛直速度が以下のように変化すると仮定することによって流線関数が構築できる:

$$(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v}) \cos(\pi z/H), \quad w = \tilde{w} \sin(\pi z/H), \quad (8.174a,b)$$

式 (8.170) を用いると, 子午面における流線関数  $\Psi_M$  が,

$$\Psi_M(y, z) = \frac{IH}{\pi} \frac{-y}{3} \exp(-y^2/4) \sin(\pi z/H), \quad (8.175)$$

によって与えられる. 式 (8.172) を用いると, 黄道面における流線関数  $\Psi_Z$  が,

$$\Psi_Z(x, z) = \frac{\sqrt{\pi}H}{\pi} [q_0(x) - q_2(x)] \sin(\pi z/H), \quad (8.176)$$

によって与えられる.

## 付録 C: 本文中の式の導出

### 1 式 (8.113) の導出

式 (8.112) から始める:

$$\alpha u - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = F^x, \quad fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \alpha \phi + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -Q. \quad (8.112a,b,c)$$

$c^2 \times \partial (8.112a) / \partial x - \alpha \times (8.112c)$  より,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\alpha^2}{c^2} \right) \phi - \frac{\partial}{\partial x}(fv) - \alpha \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\alpha}{c^2} Q, \quad (C.1)$$

を得る. また,  $\partial (8.112c) / \partial x - \alpha \times (8.112a)$  より,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\alpha^2}{c^2} \right) u + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha f}{c^2} v = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\alpha}{c^2} F^x, \quad (C.2)$$

を得る.  $f \times (C.1) + \partial (C.2) / \partial y$  を実行し, (8.112b) を用いると,

$$f \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{f^2}{c^2} \alpha v - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(fv) - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{f}{c^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{f}{c^2} \alpha F^x + \frac{\partial^2 F^x}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad (C.3)$$

となる. ここで, 式 (C.3) の左辺第三項は,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(fv) \right\} = \beta \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(yv) \right\} = \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \beta y \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

であることから, 式 (C.3) を整理すると,

$$\frac{f^2}{c^2} \alpha v - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{f}{c^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{f}{c^2} \alpha F^x + \frac{\partial^2 F^x}{\partial x \partial y} \quad (8.113)$$

を得る.

### 2 式 (8.128b) の導出

今,  $|x| < L$  において式 (8.121a),

$$\alpha q_0 + \frac{\partial q_0}{\partial x} = -A \cos kx, \quad (8.121a')$$



を係数変化法を用いて解く. また境界条件は  $q(-L) = 0$  を用いる. 始めに斉次の一階微分方程式,

$$\alpha q_0 + \frac{\partial q_0}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.4})$$

から,  $q_0 = Ce^{-\alpha x}$  であり, 次に  $C = C(x)$  とすると, 式 (8.121a') から,

$$\frac{dC}{dx} = -Ae^{\alpha x} \cos kx, \quad (\text{C.5})$$

と書ける. この方程式より,

$$\begin{aligned} C(x) &= -A \int e^{\alpha x} \cos kx dx \\ &= -A \left[ \frac{1}{\alpha^2 + k^2} (\alpha e^{\alpha x} \cos kx + k e^{\alpha x} \sin kx) + D \right] \end{aligned}$$

とわかる. よって,  $q_0(x)$  は,

$$\begin{aligned} C(x) &= e^{-\alpha x} \\ &= -A \left[ \frac{1}{\alpha^2 + k^2} (\alpha \cos kx + k \sin kx) + D e^{-\alpha x} \right] \end{aligned}$$

と書ける. ここで, 境界条件と  $k = 2\pi/L$  を用いると,  $D = ke^{-\alpha L}/(\alpha^2 + k^2)$  と求まる. したがって, 解は,

$$q_0 = \frac{-A}{\alpha^2 + k^2} \left\{ \alpha \cos kx + k [\sin kx + e^{-\alpha(x+L)}] \right\}, \quad |x| < L, \quad (\text{8.128b})$$

である.