

## 第11章 非圧縮性乱流の基礎

乱流とは高レイノルズ数流体の流れであり、非線形性に支配されており、空間的にも時間的にも乱雑さを含んでいる。定義は完璧ではなく、その特性から定義のもつれを解決することは難しいが、この章では重要な面を紐解く。乱れた流れには、幾分か上界 – 下界間にサイズのスペクトルをもった渦があり、前者はしばしば強制スケールや領域スケールによって決まり、後者は大抵粘性によって決まる。個々の渦は言ったり来たりしており本質的に予測不可能である。人生のように、というよりはむしろ乱流は果てしなく魅力的であり、あまり苛立たしいものではない。

大気海洋の循環は特に回転と成層のような様々な束縛に属する強制された散逸性流体の運動である。大きなスケールは散逸スケール（分子粘性が重要になるようなスケール）よりも大きい秩序であり、多くの場合、すべてのスケールがそうでない場合、運動は非常に非線形であり、かなり予測不可能である。伝統的に乱れているとみなされる小規模な流れについて話しているだけではない。むしろ、主な焦点は傾圧不安定に関連していて、回転と成層の影響を非常に受けているような大規模な流れにある。また、そのような乱流を地衡流乱流として知られている。しかしながら、大気海洋における乱流について議論する前に、この章ではかなり初歩的な観点から二次元および三次元乱流の基礎理論、特に慣性領域の理論について考えていく。乱流に関して広い議論をするわけではない。むしろ、海洋学者や気象学者にとって最も興味深いものや関連するものの側面について紹介する。次の章で回転と成層の効果を考え、その後に乱流拡散を見ていく。

### 11.1 乱流に関する基本的な問題

乱流は非線形であったり、それに関連して運動のスケール間で相互作用があるために難しい題材といえよう。まずはクロージャー問題そのものから始めて乱流のもつ困難な点を考えていこう。

### 11.1.1 クロージャー問題

乱流においてそれぞれの渦の細かい動きを予測することは実質的に不可能であろうが、例えば時間平均のような統計的特性は必ずしも変化するわけではないのでそのような平均量を予測することを好むかもしれない。事実上は天気を予報することはできないと認めているが気候を予測しようとしている。たとえ体系を決める方程式系を知っていてもこの課題は非常に難しいとわかる。なぜなら方程式系は非線形でありクロージャー問題に直面しているからだ。これが何か知るために速度場を平均量と変動量に分解しよう:

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}' . \quad (11.1)$$

ここで  $\bar{\boldsymbol{v}}$  は平均速度場であり、 $\boldsymbol{v}'$  は平均からの揺らぎである。平均とは時間平均であるかもしれない。この場合  $\bar{\boldsymbol{v}}$  は空間のみの関数であり時間によらない、もしくは有限時間にわたる時間平均かもしれない(例えば天気を使う場合の季節)、もしくはアンサンブル平均のいくつかの形式であるかもしれない。揺らぎの平均は定義によりゼロである。つまり、 $\boldsymbol{v}' = 0$  である。考え方は運動量方程式に式 (11.1) を代入し平均量  $\bar{\boldsymbol{v}}$  に対する閉じた方程式を得ようとする。完全な Navier-Stokes 方程式を扱うよりも次式に従う典型的な非線形系に対するこの図式を実行しよう:

$$\frac{du}{dt} + uu + ru = 0 . \quad (11.2)$$

ここで、 $r$  は定数である。この方程式の平均は次式である:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + \overline{uu} + r\bar{u} = 0 . \quad (11.3)$$

ここで  $\overline{uu}$  (つまり  $\overline{u^2}$ ) 項の値は  $\bar{u}$  がわかっているからと言って単に推定できるわけではない。なぜなら、 $\overline{uu}$  は渦量、すなわち  $\overline{u'u'}$ 、の間の相関を含んでいるからである。つまり  $\overline{uu} = \overline{uu} + \overline{u'u'} \neq \overline{uu}$  である。 $\overline{uu}$  に対する方程式をいたずらに得ようとするために次のオーダーに進むことができる。はじめに  $u^2$  に対する方程式を得るために式 (11.2) に  $u$  を掛けて、平均をとると、

$$\frac{1}{2} \frac{d\overline{u^2}}{dt} + \overline{uuu} + r\overline{u^2} = 0 , \quad (11.4)$$

を得る。この方程式は未定の三次の項  $\overline{uuu}$  を含む。この項を決める方程式は四次の項を含み、完結していない階層にいるだろう。階層を閉じるための多くの方法では  $n$  次の項に対する  $n+1$  次の項の関係に関する仮定をする。例えば、以下のように仮定する:

$$\overline{uuu} = \alpha \overline{uuu} + \beta \overline{uuu} . \quad (11.5)$$

ここで、 $\alpha$  と  $\beta$  はあるパラメータであり、物理空間やスペクトル空間(つまりフーリエ変換された変数に従う空間)にあるクロージャーは両方とも提唱されている。

変数が標準的に分配されていることがわかっているならばそのようなクロージャーは時々正確であろうが、これは乱流のケースにおいてあまり一般的ではなく、これまでに提唱されているすべてのクロージャーはせいぜい近似である。

Navier-Stokes 方程式において、この同じクロージャー問題が生じる。密度が一定 ( $\rho = 1$  という) ならば平均流に対する  $x$  方向の運動量方程式は、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}'u'}, \quad (11.6)$$

である。直交座標系に略さずに書き下すと、最後の項は、

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}'u'} = \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, \quad (11.7)$$

である。これらの項と  $y$  方向と  $z$  方向の運動量方程式中にある似た項は平均流に与える渦の効果を表し、レイノルズ応力項として知られている。乱流の「クロージャー問題」は平均流量の項にあるそのようなレイノルズ応力項の表現を見つけるようなものとして考えられるだろう。運動方程式そのものから直接推定できない物理的な仮定を取り込まずに、何らかの有用な方法で系を閉じることはできない。

### 11.1.2 乱流中の三波相互作用

運動方程式中の非線形項は、方程式系を閉じる難しさをもたらすだけでなく、異なる長さスケール間で相互作用をもたらす。この節では、このことを明白にする形式で運動方程式系を書き下す。代数的な簡単さのために二次元流れに注目を制限するだろうが、よく似た考えが三次元にも適用され、以下の計算の詳細自体は後の節で重要なものではないが考え方は重要である<sup>\*1</sup>。

二次元の非圧縮性流体に対する運動量方程式 (例えば式 (4.67) もしくは式 (5.119) を見よ) は以下のように書ける:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) = F + \nu \nabla^2 \zeta, \quad \zeta = \nabla^2 \psi. \quad (11.8)$$

強制項と粘性項は含むがコリオリ項はない。流体が一辺  $L$  の二重周期領域の正方形領域にあるとし、流線関数と渦度をフーリエ級数展開しよう。つまり、フーリエ係数をチルダを用いて表し、

$$\psi(x, y, t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \zeta(x, y, t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\zeta}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (11.9)$$

<sup>\*1</sup>[原文脚注 2] 三次元の場合の計算はより複雑なものである。その原因は圧力傾度力項と、運動方程式がベクトルの方程式であることにある。にもかかわらず、運動方程式の発散をとることで  $\nabla^2 p = Q(\mathbf{v})$  の形式の圧力に対する楕円型の方程式を得ることができる。ここで、右辺は速度とその微分の二次方程式であり、これを Fourier 変換し、そのとき二次元の場合と同様に続ける。

となる. ここで,  $\mathbf{k} = ik_x + jk_y$ ,  $\tilde{\zeta} = -k^2\tilde{\psi}$  であり,  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  である. また,  $\psi$  は実数であるとし, このとき  $\tilde{\psi}(k_x, k_y, t) = \tilde{\psi}^*(-k_x, -k_y, t)$  を満たす. ここで,  $*$  は複素共役を表し, この特性は共役対称性として知られている. 和は, 正負問わず  $x, y$  方向の波数の全てにわたってなされる. また,  $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t)$  は  $\tilde{\psi}(k_x, k_y, t)$  の省略形である. 式 (11.8) に式 (11.9) を代入し, とりあえず  $F$  と  $\nu$  とともにゼロであるならば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\zeta}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} &= \sum_{\mathbf{p}} p_x \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \times \sum_{\mathbf{q}} q_y \tilde{\zeta}(\mathbf{q}, t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &\quad - \sum_{\mathbf{p}} p_y \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \times \sum_{\mathbf{q}} q_x \tilde{\zeta}(\mathbf{q}, t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (11.10)$$

となる. ここで,  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{q}$  は  $\mathbf{k}$  と同様, 水平波数ベクトルである. 式 (11.10) に  $\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$  を掛けて領域にわたって積分し, フーリエモードが直交すること, つまり,

$$\int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} dA = L^2 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad (11.11)$$

であることを用いることで, 波数  $\mathbf{k}$  に対する発展方程式を得ることができる. ここで,  $\delta(\mathbf{p} + \mathbf{q})$  は,  $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$  のとき 1, それ以外のときはゼロとなる. これより, 強制項と散逸項を戻すと, 式 (11.10) は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} A(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t) \tilde{\psi}(\mathbf{q}, t) + \tilde{F}(\mathbf{k}) - \nu k^2 \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t), \quad (11.12)$$

となる<sup>\*2</sup>. ここで,  $A(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = (q^2/k^2)(p_x q_y - p_y q_x) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k})$  は「相互作用係数」であり, すべての  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{q}$  にわたって足しあげられている; しかしながら, デルタ関数があることにより  $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}$  を満たす三波のみの波数ベクトルはゼロではない寄与をもたらす.

ここで, ちょうど二つのフーリエモード, 波数ベクトル  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{q}$  が複素共役である  $-\mathbf{p}$  と  $-\mathbf{q}$  とともに励起されているような流体を考えよう. 式 (11.12) に従い, これらのモードは相互作用し, 三つ目の波数と四つ目の波数,  $\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$  と  $\mathbf{m} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$  を生成する (このときこれらの複素共役  $-\mathbf{k}$  と  $-\mathbf{m}$  もともに生成される). 四つの波数は, それら自身の間で相互作用し, いくつかの別の波数,  $\mathbf{k} + \mathbf{p}$  や  $\mathbf{k} + \mathbf{m}$  など, を生成し, 全波数空間を満たしていく. 個々の相互作用は三波相互作用と呼ばれ, これらの作用によって二次元でも三次元でもエネルギーが乱流中のスケール間で輸送される. 散逸項は異なる波数をもつモード間で相互作用せず, むしろ波数に対して増加し小さなスケールを優先的に好むような係数をもって, 各フーリエモードに対して抵抗のような働きをする.

<sup>\*2</sup>付録参照.

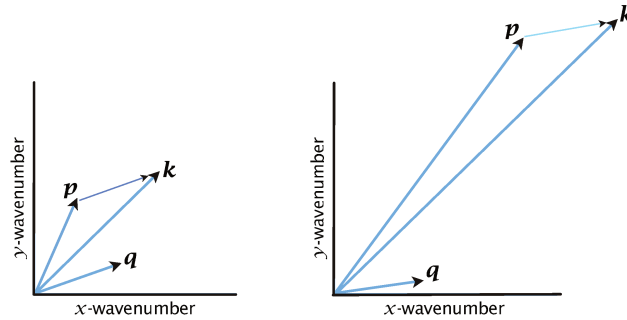


Fig. 11.1

図 11.1: 二つの相互作用する三波. それぞれ  $k = p + q$  を満たす. 左図は局所的な三波で  $k \sim p \sim q$  を満たす. 右図は局所的でない三波で  $k \sim p \gg q$  を満たす.

三波相互作用つまり  $k = p + q$  に対する選択ルールはこれらの相互作用するスケールを制限せず, 三波相互作用の型は以下の二通りになる:

1.  $k \sim p \sim q$  を満たす局所的な相互作用<sup>\*3</sup>
2.  $k \sim p \gg q$  を満たす局所的でない相互作用

これら二種類の三波は図 11.1 に図式的に表されている. 運動量方程式の解に対する詳細な解析, つまり完全に発達した乱流に対して一般的に不可能な解析, をすることなしに一方の三波相互作用が支配しているかどうか正確に言うことはできない. 以下で考える Kolmogorov 理論とその二次元的な類似物は, エネルギーを輸送する際に最も重要なのは局所的な三波であると仮定している<sup>\*4</sup>; これは合理的な仮定である. なぜなら, 小さな渦の観点から眺めると大きな渦はほとんど一樣な流れのようであり, 変形することなしに, したがってスケール間でエネルギーを輸送することなしに周りに小さな渦を移流しているからである.

<sup>\*3</sup>この「局所的な」はスペクトル空間において, 互いの波数が近いことを指す.

<sup>\*4</sup>二次元乱流においては非局所的な三波も重要になる. そのため, 二次元乱流における相似則には対数補正が必要になる (式 (11.72), Iwayama and Watanabe (2016)).

## 11.2 Kolmogorov 理論

多くの乱流理論の基礎は Kolmogorov のスペクトル理論である<sup>\*5</sup>。この理論は、式 (11.5) のような明確な方法として方程式系を閉じることにはないが、乱流のエネルギースペクトル (つまり、特定の空間スケールにエネルギーがどのくらい存在しているか) に対する予測を規定し、エネルギースペクトル (速度の二次の量) とスペクトルのエネルギーフラックス (三次の量) の間の関係を考えることで予測をする。

### 11.2.1 物理的な描像

何らかの外力によって維持されている高レイノルズ数 ( $Re$ ) 非圧縮性流体を考えよう。そのとき  $\rho = 1$  である系の発展は次式によって支配される:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (11.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (11.14)$$

ここで、 $\mathbf{F}$  は流体運動を維持するために適用する何らかの強制である。例えば、スプーンで流体をかき混ぜるようなものである。(そのようにかき混ぜることは重力のように強制 (?) ではなく、境界条件を連続的に変化させることだと異議を唱える者がいるかもしれない。このことに注意した上で強制として扱う。) これらの方程式系の単純なスケール解析は、粘性項に対する左辺の慣性項の大きさの比がレイノルズ数  $VL/\nu$  であるということを示唆しているようである。ここで、 $V$  と  $L$  はそれぞれ速度スケールと長さスケールである。明示的に海洋を考え、 $V = 0.1 \text{ ms}^{-1}$ 、 $L = 1000 \text{ km}$  そして  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  としよう。このとき  $Re = VL/\nu \approx 10^{11}$  であり、式 (11.13) の右辺にある粘性項は無視できるだろう。しかし、これによりある矛盾が生じる。まるで流体が強制されているかのようにこの強制が流体にエネルギーを注入しているようである。このことを考えるために式 (11.13) に  $\mathbf{v}$  を掛けて領域にわたって積分することでエネルギー収支を得る。もし領域を出入りする流体がない場合、運動方程式中の慣性項によってエネルギーが保存され、1.10 節を思い出し、

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 dV = \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \nu \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}) dV = \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \nu \omega^2) dV, \quad (11.15)$$

<sup>\*5</sup>[原文脚注 3] A. N. Kolmogorov (1903-1987) は、ロシアの数学者で理論物理学者であった。彼は (1941 年と 1962 年の有名な論文では) 乱流、そして確率論と統計学、さらには古典力学 (例えば Kolmogorov-Arnold-Moser の定理) に対して将来性のある貢献をした。Yaglom (1994) は彼と彼の科学的貢献の両方に関してよりたくさんの詳説を与えた。

と書ける<sup>\*6</sup>。ここで、 $\widehat{E}$  は全エネルギーである。粘性項を無視すると、強制とは通常、平均的に強制自身と相関のある速度を供給するために強制項はエネルギーの源である ( $\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} > 0$ ) ことから矛盾が生じる。粘性がない場合、エネルギーは増え続ける。

何が不適當なのだろうか？ 運動方程式中の強制のバランスを考えると、1,000 km の長さスケールと数 cm/s の速度をもつ運動に対して粘性を無視できることは正しい。しかし、非常に小さなスケールにおいて運動がないということを意味しているわけではない。もちろん、エネルギーを取り除くために小さなスケールで運動が存在しなければならないという避けることのできない結論が導かれるだろう。運動方程式のスケール解析から粘性項はあるスケール  $L_\nu$  における慣性項と比較できるということを示唆している。ここで、レイノルズ数はオーダー 1 のスケール、

$$L_\nu \sim \frac{\nu}{V}, \quad (11.16)$$

に基づく。これは地球流体に対する非常に小さなスケールであり、オーダーは mm 以下である。どこでどのようにこのような小さなスケールが生成されるのだろうか？ 境界層はひとつの重要な領域である。例えば地面直上の風のような固体の境界上にある高レイノルズ数の流れがある場合、図 5.4 に表されているように表面で滑りなし条件を満たすために速度をゼロにもっていく際に粘性が重要にならなければならない。

流体の内側にも非常に小さなスケールの運動が生成されるだろう。どのようにしてこのようなことが起きるのか？ 強制が大きなスケールにのみ作用しているとすると、その直接的な作用は渦やシアー流などから成るいくつかの大規模な流れをそれ相応に作ることである。そのとき典型的に流れにおいて不安定があるだろうし、比較的小さな渦が成長するだろう。つまり、はじめに大規模な流れが一定のシアー流と擾乱のように扱われ、一方で小規模な流れは理想化された Kelvin-Helmholtz 不安定中の方程式系に似た線形の運動方程式系に従う。この不安定は大きなスケールから準定常的な流れを明らかに取り出さなければならず、結局ある有限の振幅において飽和するだろう。この不安定は強さを増すけれども、依然としてそれを成長

<sup>\*6</sup>式 (11.15) 最右辺第二項の導出:

$$\begin{aligned} \int \nu \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} dV &= \int \nu \mathbf{v} \cdot \{ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \} dV \\ &= - \int \nu \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) dV (\because \text{式 (11.14)}) \\ &= \int \nu \{ \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \} dV \\ &= - \int \nu \boldsymbol{\omega}^2 dV \end{aligned}$$

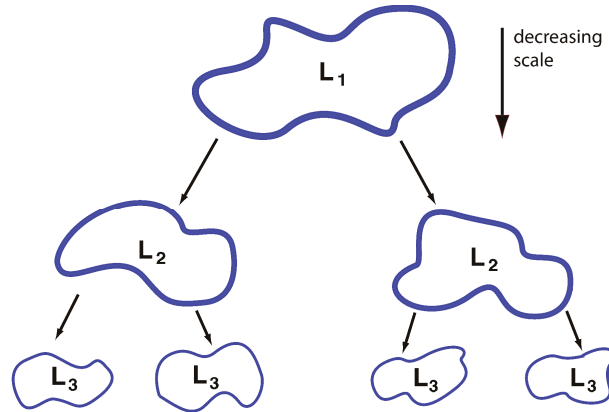


Fig. 11.2

図 11.2: 小さなスケールへのエネルギーの道筋. 大きなスケールの渦が小さなスケールの渦へ分裂する. それによって小さなスケールへエネルギーを輸送する. (実際の渦はお互いの範囲内で埋まっている. (?)) もし同等のサイズの渦の間に道筋が生じるならば (つまりそれがスペクトル的に局所的であるならば) 輸送がカスケードであると言える.

させた大規模な流れよりも典型的に小さい (擾乱の波長が小さくなる時, シアー不安定の成長率がどのくらい大きくなるかを思い出そう). 流れが有限の振幅に届いた時, 擾乱そのものは不安定となり, 比較的小さな渦がエネルギーを得て成長し続けるだろう. 渦の引き伸ばしはこの流れ全体で重要な役割を果たし, 線素を引き伸ばし, 小さなスケールで渦とエネルギーを生成する. ここで生じる概念は, スケールが幾分小さな渦に対して大規模な流れは不安定である. これらの渦は成長し, 依然として小さな渦を発達させる. そして, エネルギーは図 11.2 にあるような滝のような過程の中で段々と小さなスケールへ輸送される. 最終的に, 粘性の効果を受ける程に非常に小さな渦が生成され, エネルギーが流れ出る. したがって, 大きなスケールから小さなスケールへの運動エネルギーフラックスがあり, 小さなスケールではエネルギーが熱へ消散される.

### 11.2.2 慣性領域理論

上で述べた描像を仮定すると, エネルギースペクトルが何なのかを予測することが可能になる. ここで流れが統計的に等方 (つまり, 全ての方向で同じ) で一様 (つまり, どこでも同じ. 全ての等方的な流れは一様であるがこのことの逆は成り立たない.) であると仮定しよう. 一様性は固体境界の存在を排除するが周期的な領域において達成される. そして有限の領域は, 渦のサイズに関して時々外部スケールと呼ばれるような上限をおく.



速度場を Fourier 成分に分解するならば、そのとき有限の領域において、

$$u(x, y, z, t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{u}(\mathbf{k}, t) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (11.17)$$

と書ける。ここで、 $\tilde{u}$  は  $u$  を Fourier 変換した場であり、 $v$  と  $w$  に対して同様に書ける。また、 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  である。総和は、全ての波数  $(k_x, k_y, k_z)$  にわたる三つの和であり、有限の領域においてこれらの波数は量子化されている<sup>\*7</sup>。最終的に、 $u$  が実数であることを保証するために  $\tilde{u}(-\mathbf{k}) = \tilde{u}^*(\mathbf{k})$  であることを必要とする。ここで、アスタリスクは複素共役を表す。Parseval の定理を用いることで (本章を通して  $\rho = 1$  と仮定することで) 流体中のエネルギーは以下の式で与えられる:

$$\frac{1}{V} \int_V E dV = \frac{1}{2V} \int_V (u^2 + v^2 + w^2) dV = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2 + |\tilde{w}|^2) \equiv \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}. \quad (11.18)$$

ここで、 $E$  は単位体積当たりのエネルギー密度であり、 $V$  は領域の体積であり、最後のイコールは個別のエネルギースペクトル  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  を定義している。今、乱流は等方的であり、領域は十分大きく、上の方程式中の総和が積分に置き換えることができると仮定しよう。そのとき以下のように書ける:

$$\bar{E} = \frac{1}{V} \hat{E} = \frac{1}{2V} \int_V \mathbf{v}^2 dV = \int \mathcal{E}(k) dk. \quad (11.19)$$

ここで、 $\bar{E}$  は平均エネルギー、 $\hat{E}$  は全エネルギー、 $\mathcal{E}(k)$  はエネルギースペクトル密度もしくはエネルギースペクトルである。したがって小さな波数間隔  $\delta k$  において  $\mathcal{E}(k) \delta k$  はエネルギーを表す。等方性を仮定したことでエネルギーはスカラー波数  $k$  のみの関数である。ここで  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  である。 $\mathcal{E}(k)$  の次元は  $L^3/T^2$  で、 $\bar{E}$  の次元は  $L^2/T^2$  である。

今、大きなスケールで流体がかき混ぜられ、運動方程式中の非線形項を通じてこのエネルギーが小さなスケールへ輸送され、そこで粘性によって散逸されるとする。重要な仮定は、強制スケールが散逸スケールより十分大きいならば、大きなスケールと散逸スケールの間で中間のスケールの領域が存在し、そこでは強制も散逸も力学に明らかに重要ではないとすることである。この仮定は、局所性仮説として知られ、(スペクトル空間において) 十分に局所的であるエネルギーの非線形輸送による。この中間の領域は慣性領域として知られている。なぜなら慣性項は強制や散逸と違って運動量平衡において支配的でなければならないからである。かき混ぜによる単位体積当たりのエネルギー注入率が  $\epsilon$  に等しいとき、安定な状態にあるならば大きなスケールから小さなスケールへのエネルギーフラックスがなければならず、そのフラックスも  $\epsilon$  に等しく、エネルギー散逸率も  $\epsilon$  である。

<sup>\*7</sup>今、 $0 < x < L$  の領域を考えるとすると、 $k_x = 2n\pi/L (n = 0, 1, 2, \dots)$  と書ける。

## 次元と Kolmogorov スペクトル

| 物理量                         | 次元              |
|-----------------------------|-----------------|
| 波数 $k$                      | $1/L$           |
| 単位質量当たりのエネルギー $E$           | $U^2 = L^2/T^2$ |
| エネルギースペクトル $\mathcal{E}(k)$ | $EL = L^3/T^2$  |
| エネルギーフラックス $\epsilon$       | $E/T = L^2/T^3$ |

もし  $\mathcal{E} = f(\epsilon, k)$  ならば, そのときエネルギースペクトルに対する次元的にのみ整合的な関係式は,

$$\mathcal{E} = \mathcal{K}\epsilon^{2/3}k^{-5/3},$$

である. ここで,  $\mathcal{K}$  は無次元定数である.

今, 乱れた場のエネルギースペクトルに対する一般的な理論はないが, エネルギースペクトルは一般的な形式,

$$\mathcal{E}(k) = g(\epsilon, k, k_0, k_\nu), \quad (11.20)$$

をとるとする. ここで, 右辺は波数空間のエネルギーフラックス率もしくはエネルギーカスケード率  $\epsilon$ , 波数  $k$ , 強制波数  $k_0$  そして散逸が効く波数  $k_\nu$  (ここで  $k_\nu \sim L_\nu^{-1}$  である) の関数である. もちろん関数  $g$  は強制の特有の性質によるものである. 今, 局所性仮説は本質的に慣性領域の範囲内のあるスケールにおいて小さなスケールへのエネルギーフラックスはそのスケールかそれに近いスケールにおいて生じる過程にだけ依存する. つまり, エネルギーフラックスは  $\mathcal{E}$  と  $k$  の関数のみであるか, 等価的にエネルギースペクトルはエネルギーフラックス  $\epsilon$  と波数そのものだけの関数である. 物理的な観点からエネルギーが小さなスケールへカスケードするとき強制の詳細が忘れられるが粘性の効果はまだ明らかではなく, エネルギースペクトルは以下の形式をとる:

$$\mathcal{E}(k) = g(\epsilon, k). \quad (11.21)$$

関数  $g$  は普遍的, つまりどの乱流においても同じであると仮定される.

今, 次元解析を用いることで関数  $g(\epsilon, k)$  を得よう (囲みを見よ). 式 (11.21) において左辺の次元は  $L^3/T^2$  をもつ.  $T^{-2}$  は  $\epsilon^{2/3}$  にバランスされるだけである. なぜなら  $k$  は時間によらないからである. つまり式 (11.21) とその次元は以下の形式を取らなければならない:

$$\mathcal{E}(k) = \epsilon^{2/3}g(k), \quad (11.22a)$$

$$\frac{L^3}{T^2} \sim \frac{L^{4/3}}{T^2}g(k). \quad (11.22b)$$

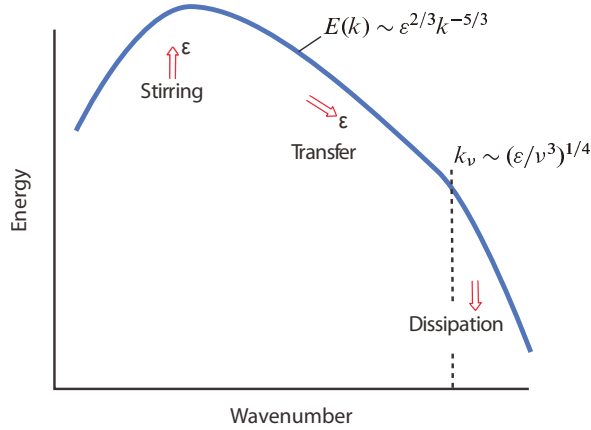


Fig. 11.3

図 11.3: Kolmogorov 理論における三次元乱流のエネルギースペクトル。エネルギーがある割合  $\epsilon$  で供給されている。エネルギーは小さなスケールへカスケードし、そこで最終的に粘性によって散逸される。強制スケールより大きなスケールへの系統的なエネルギー輸送はなく、そこでエネルギーは減る。

ここで  $g(k)$  は任意の関数である。明らかに  $g(k)$  は  $L^{5/3}$  の次元をもち、もし物理的な仮定が正しいならば、そのときなければならない関数の関係は、

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{K}\epsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad (11.23)$$

である。これは有名な「Kolmogorov  $-5/3$  スペクトル則」であり、乱流理論の基礎の一つとして大事にされている。このスペクトル則は図 11.3 に描かれており、いくつかの実験結果が図 11.4 に示されている。パラメータ  $\mathcal{K}$  は無次元定数であり、この理論によって未確定な数である。このパラメータは Kolmogorov 定数として知られ、実験的にその値が約 1.5 であるとされている<sup>\*8</sup>。

この結果を導くための等価的で啓発的な方法は初めに渦回転時間  $\tau_k$  を定義することである。これはパーセルが速度  $v_k$  が距離  $1/k$  を動くのにかかる時間である。ここで  $v_k$  はスケール  $k$  (もしくはその逆数) に関係する速度である。次元的な考え方から  $v_k = [\mathcal{E}(k)k]^{1/2}$  となり、したがって、

$$\tau_k = [k^3\mathcal{E}(k)]^{-1/2}, \quad (11.24)$$

<sup>\*8</sup>[原文脚注 5] Kolmogorov (1941) はわずかに異なる方法によって結果を得た。つまり波数よりむしろ実空間の間隔を用いて、縦方向の速度差の構造関数  $D(r) \equiv \langle [u_i(x+r) - u_i(x)]^2 \rangle \sim r^{2/3}$  に対する等価な結果を導いた。Obukhov (1941) はスペクトル空間における議論を与え、初めて  $E(k) \sim k^{-5/3}$  という形を書き下した。Kolmogorov の考えはより一般的なものとされ、 $-5/3$  スペクトルは通常彼にちなんで名付けられるが、「Kolmogorov-Obukhov」 $-5/3$  スペクトルとも呼ばれることもある。

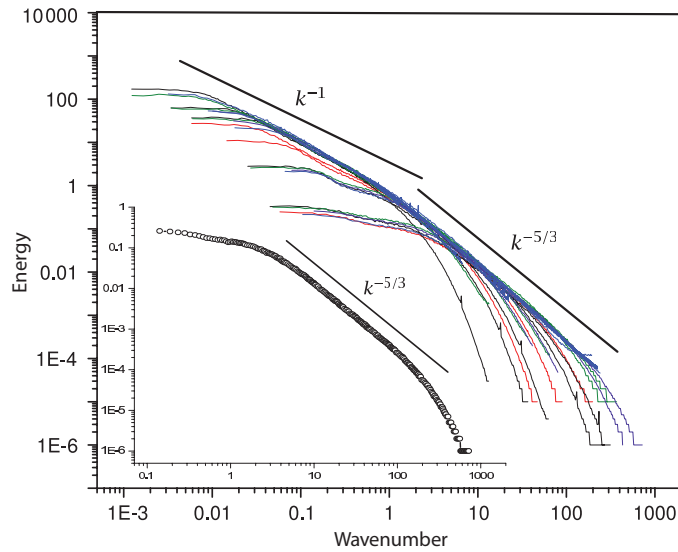


Fig. 11.4

図 11.4: Princeton の Superpipe 施設において行われたいくつかの実験で計量された三次元乱流のエネルギースペクトル。外側の線は、最大  $10^6$  の異なるレイノルズ数下で行われたたぐいの実験から求めたスペクトルを示しており、それらのスペクトルの広さは適切に再スケールされている。比較的小さなスケールでは良い  $-5/3$  スペクトルを示しているが、一方で大きなスケールにおいて渦が管の壁の効果を受けてスペクトルが少し緩やかになっている。内側の線は  $Re \approx 10^6$  の単一の実験での管の中心におけるスペクトルを示している。

となる。そのとき Kolmogorov の仮定は、

$$\epsilon \sim \frac{v_k^2}{\tau_k} = \frac{k\mathcal{E}(k)}{\tau_k}, \quad (11.25)$$

とすることと等価である。もし  $\epsilon$  が一定であることを要求するならば、そのとき式 (11.24) と (11.25) は式 (11.23) に従う<sup>\*9</sup>。

### 粘性スケールとエネルギー散逸

幾分小さな長さスケールにおいて粘性が重要になると期待すべきであり、ちょうど考えてきたスケール理論は失敗するだろう。そのスケールとは何か？ 慣性領域において摩擦は重要ではない。なぜなら摩擦が効く時間スケールは、摩擦が重要であるためには非常に長く、力学の効果が支配的であるからである。運動方程式中の粘性項は  $\nu \nabla^2 u$  であり、そのためスケール  $k^{-1}$  における粘性もしくは散逸時

<sup>\*9</sup>式 (11.25) を式 (11.24) に代入することで式 (11.23) と等価な式を得ることができる。

間スケール  $\tau_k^\nu$  は,

$$\tau_k^\nu \sim \frac{1}{k^2 \nu}, \quad (11.26)$$

である。したがって粘性時間スケールはスケールとともに減少する。渦回転時間  $\tau_k$ , つまり慣性時間スケール, は Kolmogorov スペクトルにおいて,

$$\tau_k = \epsilon^{-1/3} k^{-2/3}, \quad (11.27)$$

である。散逸が重要になる波数は, 上の二つの時間スケールが等しくなることで得られ, 散逸波数  $k_\nu$  とそれに伴う長さスケール  $L_\nu$  に従う:

$$k_\nu \sim \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}, \quad L_\nu \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}. \quad (11.28a,b)$$

$L_\nu$  は Kolmogorov スケールと呼ばれる。このスケールは, 長さの次元をもつ物理量  $\nu$  と  $\epsilon$  から成る唯一の物理量である。(これは Kolmogorov スケールにおいて表記  $V$  が速度の大きさであるとしたときに式 (11.16) から与えられるスケールと同じである。) したがって,  $L \gg L_\nu$  に対しては  $\tau_k \ll \tau_k^\nu$  であり慣性効果が支配的である。  $L \ll L_\nu$  に対しては  $\tau_k^\nu \ll \tau_k$  であり摩擦の効果が支配的である。実際, 散逸スケールより小さな長さスケールにおいて式 (11.27) は誤りである。エネルギースペクトルは  $k^{-5/3}$  より急に減少し, 慣性時間スケールは式 (11.27) の示唆するところよりも急ではないが減少し, 散逸がさらに支配的になる。

散逸スケールがあるとすれば, 平均エネルギー散逸率  $d\bar{E}/dt$  を見積もろう。平均エネルギー散逸率は,

$$\frac{d}{dt}\bar{E} = \frac{1}{V} \int \nu \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} dV, \quad (11.29)$$

によって与えられる。散逸が効くところでの長さは Kolmogorov スケールであり,  $v_k^2 \sim \epsilon^{2/3} k^{-2/3}$  であることに注意して式 (11.28a) を用いることで平均エネルギー散逸率は,

$$\frac{d}{dt}\bar{E} \sim \nu k_\nu^2 v_{k_\nu}^2 \sim \nu k_\nu^2 \frac{\epsilon^{2/3}}{k_\nu^{2/3}} \sim \epsilon, \quad (11.30)$$

とスケールされる。つまり, エネルギー散逸率はエネルギーカスケード率と等しい。一方ではこのことは合理的であることに思えるが, 他方ではそれは粘性によらないということである。特に, 粘性の極限がゼロに近づく場合においてはエネルギー散逸が有限のままである! 確かに粘性がゼロに近づけばエネルギー散逸率はゼロに近づかなければならないのだろうか? このことが事実ではないことを示すために, 幾分大きなスケールにおいてエネルギーが注入されることを考えると, かき混ぜの大小は主にエネルギー注入率とエネルギーカスケード率を決定する。そのとき粘性の効果が重要になるようなスケールは, 式 (11.28b) によって与えられる粘性スケール  $L_\nu$  によって決定される。粘性がゼロに近づくとき, エネルギー散逸の

不変性を保つような方法で  $L_\nu$  がより小さくなる. ( $\because$  式 (11.28b)) これは三次元乱流において重要な結果の一つである. 今, 1.10 節において Euler 方程式系 (つまり, 初めから省略された粘性項をもつ流体の方程式系) がエネルギーを保存することを確かめた. このことは Euler 方程式系が Navier-Stokes 方程式系の特異な極限である. 粘性がゼロに近づくときの Navier-Stokes 方程式系の振る舞いは, 最初から方程式系から単に粘性項を省略することで生じる振る舞いとは異なる.

大気において  $L_\nu$  はどのくらい大きいのだろうか? 粗い見積もりは, もしかすると大きさのオーダーによると良くないかもしれないが,  $\epsilon$  が  $U^3/L$  の単位をもち, 大気境界層 (ここでは小さなスケールへの三次元的なエネルギーカスケードが存在するかもしれない) において 100 m のオーダーの長さスケールにおいて速度の変動が  $1 \text{ cm s}^{-1}$  のオーダーであることに注意することから来て, このとき  $\epsilon \approx 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$  を与える. 式 (11.28b) を用いることでそのとき散逸スケールが mm 程度のオーダーであるとわかる. 海洋においても散逸スケールが mm のオーダーである. 三次元においても二次元においても慣性領域の様々な特性は次の囲みにまとめられている.

### 二次元と三次元の乱流における慣性領域特性

参考のために数少ない慣性領域特性を以下に並べてある. ここで, 無次元定数は除いている.

|                | 三次元エネルギー領域                      | 二次元エンストロフィー領域             |       |
|----------------|---------------------------------|---------------------------|-------|
| エネルギースペクトル     | $\epsilon^{2/3} k^{-5/3}$       | $\eta^{2/3} k^{-3}$       | (T.1) |
| 渦回転時間          | $\epsilon^{-1/3} k^{-2/3}$      | $\eta^{-1/3}$             | (T.2) |
| 粘性スケール $L_\nu$ | $(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$        | $(\nu^3/\eta)^{1/6}$      | (T.3) |
| パッシブトレーサースペクトル | $\chi \epsilon^{-1/3} k^{-5/3}$ | $\chi \eta^{-1/3} k^{-1}$ | (T.4) |

これらの表現は以下の通り:

$$\begin{aligned} \nu &= \text{粘性係数}, k = \text{波数}, \epsilon = \text{エネルギーカスケード率} \\ \eta &= \text{エンストロフィーカスケード率}, \chi = \text{トレーサーの二次モーメントのカスケード率}. \end{aligned}$$

## 自由度

大気のような乱れた流体がどのくらいたくさんの自由度を潜在的に持っているのだろうか? 以下の表式を用いてこの数  $N$  を見積もる:

$$N \sim \left( \frac{L}{L_\nu} \right)^3. \quad (11.31)$$

ここで  $L$  は、大きなスケールにおいてエネルギー保持渦の長さスケールである。もし  $L = 1,000 \text{ km}$  と  $L_\nu = 1 \text{ mm}$  とするならば、この値は約  $10^{27}$  となる! 幾分より一般的な根拠に基づいて  $N$  に対する表現を得ると、式 (11.28b) を用いると、

$$N \sim L^3 \left( \frac{\epsilon}{\nu^3} \right)^{3/4}, \quad (11.32)$$

が得られ、また、 $\epsilon \sim U^3/L$  を用いると、

$$N \sim \left( \frac{UL}{\nu} \right)^{9/4} = Re^{9/4}, \quad (11.33)$$

となる。ここで、 $Re$  は大規模な流れに基づく Reynolds 数である。典型的な大規模な大気の流れに対して、 $U \sim 10 \text{ m s}^{-1}$ 、 $L \sim 10^6 \text{ m}$  そして  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 、 $Re \sim 10^{12}$  を用いると、再び  $N \sim 10^{27}$  を得る。明らかなことに、この数は非常に近似的であるが、それにもかかわらず大気におけるポテンシャル自由度の数は実に巨大で、Avogadro 数よりも大きい。したがって、乱れた大気を明確にモデルしようとするのは、個々の分子それぞれの運動を理解することで部屋の中のガスをモデルしようとすることに似ており、それは必要でないようである。どうしてそれをモデルすべきなのか? そのことは要するに乱流の (未解決の) 問題である。

## 11.2.3 仮定上の最後の注意事項

Kolmogorov 理論の中でなされた一様性と等方性に関する仮定は、乱流の扱いやすいモデルを形成したい (そして最も実用的な目的に対して一様的で等方的な乱流における実験を確かに考えつくことができる) 為に行ったアプローチである。本質的で物理的な仮定は以下の通り:

- (i) エネルギーフラックスが一定であるような慣性領域が存在する。
- (ii) エネルギーが一連の小さな足取りで大きなスケールから小さなスケールへカスケードされ、そのとき波数空間の局所的な物理量によってエネルギースペクトルが決まる。

二番目の仮定は局所性仮説であり、この仮説がなければ、式 (11.23) の代わりに以下の式を用いる:

$$\mathcal{E} = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}g(k/k_0)h(k/k_\nu). \quad (11.34)$$

ここで、 $g$  と  $h$  は未知の関数である。  $g(k/k_0) = h(k/k_\nu) = 1$  を満たす中間の波数領域が存在することを本質的に仮定する。

あまり明白ではないが、一番目の仮定は非間欠性仮説と呼ばれるかもしれない、そしてその仮説は、大きな振幅をもつ (時間もしくは空間において) 稀な出来事がエネルギーフラックス率もしくはエネルギー散逸率を支配しない。もしそうするならば、そのときフラックスが強く変動し、乱流統計学は  $\epsilon$  によって完全に特徴づけられることはなく、Kolmogorov 理論は正確に正しいものではなくなる。理論において  $\epsilon$  は平均エネルギーカスケード率、 $\epsilon^{2/3}$  は平均量の  $2/3$  乗であり、これは  $2/3$  乗の平均量と等しくないことに注意せよ。理論による高次の統計学 (例えば高次の構造関数) が誤ってよく見つかるけれども、実際のところ高 Reynolds 数の乱流において  $-5/3$  スペクトルは非常に高い正確性のもとでよく観測されるが (例えば、図 11.4) , 一般的に Kolmogorov 理論は正確でないと言われている<sup>\*10</sup> .

## 11.3 二次元乱流

二次元乱流は、主に別の二次の不変量であるエンストロフィー (以下に定義される。5.6.3 節も見よ) が存在するために三次元乱流とは非常に異なる振る舞いをする。二次元において非圧縮流れに対する渦度方程式は以下のように表される:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = F + \nu \nabla^2 \zeta. \quad (11.35)$$

ここで、 $\mathbf{u} = ui + vj$ ,  $\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{u}$ ,  $F$  は攪拌項である。流線関数を用いると、 $u = -\partial\psi/\partial y$ ,  $v = \partial\psi/\partial x$  そして  $\zeta = \nabla^2\psi$  より式 (11.35) は以下のように書ける:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi) = F + \nu \nabla^4 \psi. \quad (11.36)$$

両辺に  $-\psi$  を掛けて領域にわたって積分することでエネルギー方程式を、両辺に  $\zeta$  を掛けて同様に積分することでエンストロフィー方程式を得る<sup>\*11</sup> .  $F = \nu = 0$  の

<sup>\*10</sup>[原文脚注 7]  $-5/3$  の予測を確実にする最初の観測は潮路のものである (Grant *et al.* 1962) . 1961 年にマルセイユで開催された乱流会議でこれらの結果が最初に紹介された。皮肉にも同時期に Kolmogorov は、局所的な平均散逸率を組み込んだ彼の原論の修正版を発表し、間欠性を考慮しようとした。そこで彼の最初の理論は不完全であったことを認めた (Kolmogorov 1962) . K41 が最初に発表された直後に L. D. Landau が Kolmogorov に間欠性の重要性を指摘したと言われている。

<sup>\*11</sup>付録 B 参照.



とき,

$$\widehat{E} = \frac{1}{2} \int_A (u^2 + v^2) dA = \frac{1}{2} \int_A (\nabla\psi)^2 dA, \quad \frac{d\widehat{E}}{dt} = 0, \quad (11.37a)$$

$$\widehat{Z} = \frac{1}{2} \int_A \zeta^2 dA = \frac{1}{2} \int_A (\nabla^2\psi)^2 dA, \quad \frac{d\widehat{Z}}{dt} = 0, \quad (11.37b)$$

とわかる. ここで, 積分は境界に対して垂直でない流れかもしくは周期的な境界条件のどちらか一方を伴う有限の領域にわたって実行される<sup>\*12</sup>. 物理量  $\widehat{E}$  はエネルギー,  $\widehat{Z}$  はエントロフィーとして知られる. 渦の伸縮項は三次元乱流において非常に重要であるが, 二次元の場合においては恒等的にこの項が消えるためにエントロフィーの不変性が生じる. 実際, パーセル上で渦度が保存されるために渦度の任意の関数の  $A$  にわたる積分はゼロであることは明らかである. つまり, 式 (11.35) から,

$$\frac{Dg(\zeta)}{Dt} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt} \int_A g(\zeta) dA = 0, \quad (11.38)$$

<sup>\*12</sup>式 (11.37a) のエネルギー  $\widehat{E}$  の表式を詳しく見ていく. ここで,  $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$  の正方形領域  $A$  の流れを考える. 各方向に部分積分を実行すると,

$$\begin{aligned} \widehat{E} &= \frac{1}{2} \int_A (\nabla\psi)^2 dA = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_y} dy \left\{ \left[ \psi \frac{\partial\psi}{\partial x} \right]_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \psi \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} dx \right\} + \frac{1}{2} \int_0^{L_x} dx \left\{ \left[ \psi \frac{\partial\psi}{\partial y} \right]_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \psi \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} dy \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_y} dy \left[ \psi \frac{\partial\psi}{\partial x} \right]_0^{L_x} + \frac{1}{2} \int_0^{L_x} dx \left[ \psi \frac{\partial\psi}{\partial y} \right]_0^{L_y} - \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) dx dy, \quad (a) \end{aligned}$$

となる. ここで, 周期境界条件を課した場合, 式 (a) の右辺第一項と第二項は消え, 式 (11.39) を満たす. 境界を貫く流れがない場合, 閉領域の境界は流線関数の等値線となる. 境界における流線関数の値を  $\psi_0$  とすると, 式 (a) の右辺第一項は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{L_y} dy \left[ \psi \frac{\partial\psi}{\partial x} \right]_0^{L_x} &= \frac{1}{2} \int_0^{L_y} dy \{ \psi_0 v(L_x, y) - \psi_0 v(0, y) \} \\ &= \frac{1}{2} \psi_0 \int_0^{L_y} v(L_x, y) dy + \frac{1}{2} \psi_0 \int_{L_y}^0 v(0, y) dy, \quad (b) \end{aligned}$$

となり, 同様に右辺第二項は,

$$\frac{1}{2} \int_0^{L_x} dx \left[ \psi \frac{\partial\psi}{\partial y} \right]_0^{L_y} = \frac{1}{2} \psi_0 \int_{L_x}^0 u(x, L_y) dx + \frac{1}{2} \psi_0 \int_0^{L_x} u(x, 0) dx, \quad (c)$$

となる. よって, 式 (b) と (c) より式 (a) は,

$$\widehat{E} = \frac{1}{2} \psi_0 \oint_{\partial A} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_A \psi \zeta dA,$$

と書ける. ここで,  $\mathbf{u} = (u, v)$ ,  $d\mathbf{r} = (dx, dy)$  であり,  $\partial A$  は領域  $A$  の境界を表す. 右辺第一項は循環を含む項である.

である。ここで、 $g(\zeta)$  は任意の関数である。すぐわかるように、この無数の保存特性に関して特にエンストロフィーが保存すること ( $g(\zeta) = \zeta^2$  のとき) がわかり、スケール間のエネルギーの流れへの大きな影響がある<sup>\*13</sup>。

### 11.3.1 エネルギー輸送とエンストロフィー輸送

三次元乱流においてエネルギーが渦の伸縮を経て小さなスケールへカスケードすることを仮定してきた。二次元においてはそのメカニズムが欠けており、エネルギーが大きなスケールへ輸送されることを予測する理由がある。エネルギーとエンストロフィーが保存することの二つの積分による束縛からこの直感に反する振る舞いが生じ、以下の三つの議論はなぜこのことがそのようにあるのかを示す。

#### I. 渦度の引き伸ばし

図 11.5 のように非粘性に近い流体において渦度のバンドやパッチを考えよう。流体が移動するとき、それぞれの流体要素の渦度は保存される。今、流体の準ランダムな動きはバンドを伸ばす働きをするだろうと予測すべきだが、その領域は保存されなければならないのでバンドは細くなり、その結果、渦度勾配は増加するだろう。このことはエンストロフィーが小さなスケールへ移動することと等価である。今、流体におけるエネルギーは、

$$\hat{E} = -\frac{1}{2} \int \psi \zeta dA, \quad (11.39)$$

である。ここで、流線関数は Poisson 方程式  $\nabla^2 \psi = \zeta$  を解くことで得られる。もし渦度が主に一方向にのみ局所的に伸ばされるならば (渦度は領域を保存しなければならないので)、Poisson 方程式を解く際の積分は、引き伸ばしの方向に大きくなるがその垂直方向にはほとんど小さくならないような流線関数のスケールを導く。なぜなら、引き伸ばしは平均的に、あらゆる方向において、流線関数のスケール全体があらゆる方向に増加することを生じさせ、小さなスケールへのエンストロフィーカスケードは大きなスケールへのエネルギー輸送に伴う。

<sup>\*13</sup>[原文脚注 8] 二次元乱流に関する初期の二つの論文は、Lee (1951) と Fjørtoft (1953) である。Lee (1951) は Kolmogorov のエネルギー慣性領域のもつ渦度の物質微分の矛盾を述べ、Fjørtoft (1953) は大規模な大気運動の二次元の性質を理解するものである。Batchelor (1953b) はエネルギーとエンストロフィーが保存する結果として低波数においてエネルギーが集中する傾向を述べた。Kraichnan (1967) によって理論が発達した。彼は二次元カスケードにおける波数空間の傾き (Leith (1968) と Batchelor (1969)) を予測した。Lilly (1969) はいくつかの初期数値積分を行った。検討のために Kraichnan & Montgomery (1980), Danilov & Gurarie (2001) そして Boffetta & Ecke (2012) を見よ。

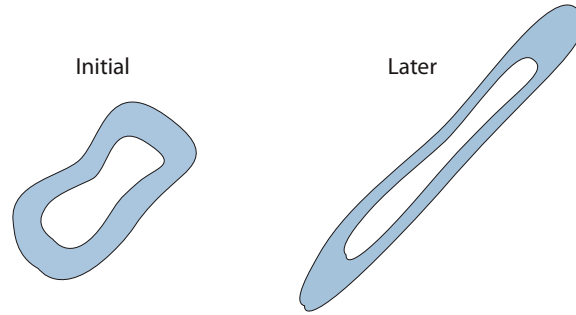


Fig. 11.5

図 11.5: 二次元非圧縮流れにおいて流体のバンドは引き伸ばされるが、その領域は保存される。折り畳みとさらなる引き伸ばしによって引き伸ばしがなされ、図 11.8 にあるようにフィラメントを形成する。渦度は流体パーセルに凍結されるので、影付きの領域（そして穴）における渦度は保持される。したがって、渦度勾配が増加し、それによってエンストロフィーが平均的に小さなスケールへ移動する。

## II. エネルギーとエンストロフィーの保存に関する議論

少し考えると、波数空間においてエネルギーとエンストロフィーの分布が、波数が支点からの距離の役割をもつので、この慣性での質量とモーメントの分布と似ている。質量の分布が広がるように質量を再配置するには質量の中心を支点のほうへ移動しなければならない。したがって、相似的には、エネルギーとエンストロフィーの両方を保存し、波数空間において分布を広げるような流れの任意の再配置は、低波数へエネルギーを、高波数へエンストロフィーを移動させるようにするものであるだろう。このことを証明するために平均エネルギーと平均エンストロフィーに対する以下の式から始める:

$$\bar{E} = \int \mathcal{E}(k) dk, \quad \bar{Z} = \int \mathcal{Z}(k) dk = \int k^2 \mathcal{E}(k) dk. \quad (11.40)$$

ここで、 $\mathcal{E}(k)$  と  $\mathcal{Z}(k)$  はそれぞれ平均エネルギースペクトルと平均エンストロフィースペクトルである。エネルギーの波数空間での位置を特徴づける波数は重心、

$$k_e = \frac{\int k \mathcal{E}(k) dk}{\int \mathcal{E}(k) dk}, \quad (11.41)$$

であり、簡単化のために単位を規格化するので分母を 1 とする。エネルギーの分布の広がり、

$$I \equiv \int (k - k_e)^2 \mathcal{E}(k) dk, \quad \frac{dI}{dt} > 0, \quad (11.42)$$

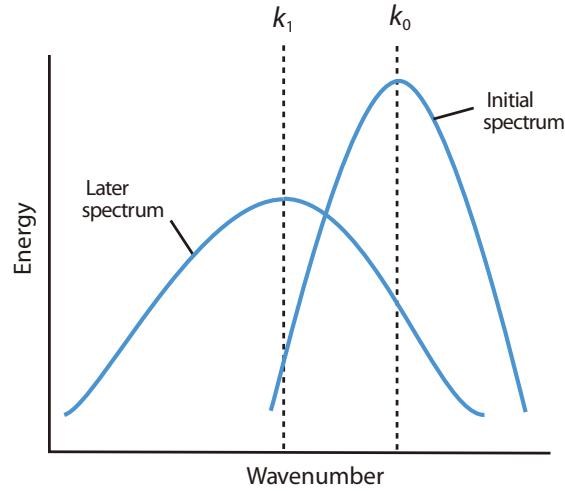


Fig. 11.6

図 11.6: 二次元流れにおいてエネルギースペクトルの分布の幅が増加することを仮定すると、非線形で渦巻く流れにおいて予測できるように、スペクトルの重心が大きなスケール（より低波数）へ移動する。

を定義することで定式化される。ここで、 $I$  はエネルギーの分布の幅を評価し、これは増加すると仮定される。積分の展開は、

$$\begin{aligned} I &= \int k^2 \mathcal{E}(k) dk - 2k_e \int k \mathcal{E}(k) dk + k_e^2 \int \mathcal{E}(k) dk \\ &= \int k^2 \mathcal{E}(k) dk - k_e^2 \int \mathcal{E}(k) dk, \end{aligned} \quad (11.43)$$

で与えられる。式 (11.41) から  $k_e = \int k \mathcal{E}(k) dk$  はエネルギーの加重重心であるから、最後の式が成り立つ。エネルギーとエントロフィーの両方が保存されるため、式 (11.43) は、

$$\frac{dk_e^2}{dt} = -\frac{1}{E} \frac{dI}{dt} < 0, \quad (11.44)$$

を与える。したがって、分布の重心はより低波数へ、つまり大きなスケールへ移動する (図 11.6 を見よ)。

一方で、エントロフィーの分布の中心を適切に定義する大きさはより高波数へ移動する。長さの直接的な大きさである波数の逆数を扱うならば、証明は簡単に以下の通りである<sup>\*14</sup>。ここで、 $q = 1/k$  とし、非線形相互作用によってエントロフィーの分布が広がると仮定しよう。その結果、式 (11.42) と類似的に、

$$J \equiv \int (q - q_e)^2 \mathcal{Y}(q) dq, \quad \frac{dJ}{dt} > 0, \quad (11.45)$$

<sup>\*14</sup>波数を用いて証明しようとどうなるか、について記述しておく。

である。ここで、 $\mathcal{Y}(q)$  は、エンストロフィーが  $\int \mathcal{Y}(q) dq$  であり、

$$q_e = \frac{\int q \mathcal{Y}(q) dq}{\int \mathcal{Y}(q) dq}, \quad (11.46)$$

であるようなものである。式 (11.45) 中の積分を展開し、式 (11.46) を用いることで、

$$J = \int q^2 \mathcal{Y}(q) dq - q_e^2 \int \mathcal{Y}(q) dq, \quad (11.47)$$

を得る。しかし、 $\int q^2 \mathcal{Y}(q) dq$  はエネルギーを表すので保存される。したがって、

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{d}{dt} q_e^2 \int \mathcal{Y}(q) dq, \quad (11.48)$$

であり、これより、

$$\frac{dq_e^2}{dt} = -\frac{1}{Z} \frac{dJ}{dt} < 0, \quad (11.49)$$

である。したがって、エンストロフィー分布を特徴づける長さスケールは小さくなり、それに相当する波数は大きくなる。

### III. 相似性議論

任意の初期エネルギー分布をもつ流体が自由に発展でき、境界から取り除かれているような初期値問題を考えよう。この問題の二つの状況を述べる：

- (i) (問題に課せられた方法のために) 外部から課せられる長さスケールはない；
- (ii) エネルギーは保存される (このことは仮定である)。

三次元においてはエネルギーが小さなスケールへ高速でカスケードし散逸するために、二番目の状況は議論を二次元に制限するが、ここではこのことは生じないと仮定しよう。そのとき、より一般的な同様の議論を用いることで、これらの二つの仮定はエネルギー輸送の一般的な方向を推測する上で十分である。始めに流体の単位質量当たりのエネルギーを、

$$\bar{E} = U^2 = \int \mathcal{E}(k, t) dk, \quad (11.50)$$

と書く。ここで、 $\mathcal{E}(k, t)$  はエネルギースペクトル、 $U$  は全エネルギーの平方根に比例し、速度の単位をもつ。次元的な理由で、

$$\mathcal{E}(k, t) = U^2 L \hat{\mathcal{E}}(\hat{k}, \hat{t}), \quad (11.51)$$

と書く. ここで,  $\widehat{\mathcal{E}}$  とその独立変数は無次元の物理量であり,  $L$  は任意の長さスケールである. しかしながら, 時間とともに初期条件が忘れられるのならば, 問題中の長さスケールはなく, エネルギースペクトルを決めることのできる唯一のパラメータはエネルギー, 時間そして波数, つまり,  $U, t$  そして  $k$  である. 少し考えると, そのときエネルギースペクトルに対する最も一般的な形式は,

$$\mathcal{E}(k, t) = U^3 t \widehat{\mathcal{E}} = U^3 t g(Ukt), \quad (11.52)$$

であることがわかる. ここで,  $g$  はその独立変数に関する任意の関数である.  $g$  の議論は  $U, t$  そして  $k$  から成る唯一の無次元数であり,  $U^3 t$  から  $\mathcal{E}$  に対する適切な次元を与える. 今, エネルギーのことを考えると, 積分量,

$$I = \int_0^\infty t g(Ukt) dk, \quad (11.53)$$

は, 時間の関数ではないことがわかる. ここで,  $\vartheta = Ukt$  であると定義すると, もし,

$$\int_0^\infty g(\vartheta) d\vartheta = \text{constant}, \quad (11.54)$$

であるならば, この必要条件は満たされる. 今, 結合  $\vartheta = Ukt$  を通じてのみスペクトルが  $k$  の関数である. したがって, 時間が進むにつれてスペクトルの特徴はより低い  $k$  へ移動する. 例えば, 初期にエネルギーがある波数  $k_p$  にピークがあるとしよう. 積  $tk_p$  は保存され, そして  $k_p$  は時間とともに減少しなければならず, エネルギーは大きなスケールへ移動しなければならない. 同様に平均波数  $k_e$  で重みがかかったエネルギーは小さなスケールもしくはより高波数へ移動しなければならない. このことを明確にするために,

$$k_e = \frac{\int k \mathcal{E} dk}{\int \mathcal{E} dk} = \frac{\int k \mathcal{E} dk}{U^2} = \int k U t g(Ukt) dk = \int \frac{\vartheta g(\vartheta)}{U t} d\vartheta = \frac{C}{U t}, \quad (11.55)$$

とする. ここで, 全ての積分は間隔  $(0, \infty)$  にわたって実行され,  $C = \int \vartheta g(\vartheta) d\vartheta$  は一定である. したがって, エネルギー分布の波数重心は時間とともに減少し, 流れの特徴的なスケール  $1/k_e$  は時間とともに増加する. 興味深いことに, エンストロフィーはこの議論に明確に入り込まず, 一般的にエンストロフィーは保存しない. むしろ, エネルギーが保存する必要条件は議論を二次元に制限することである. もし最初からエネルギーが保存することを認めるならば, エネルギーは大きなスケールへ輸送されなければならない<sup>\*15</sup>.

<sup>\*15</sup>[原文脚注 9] この相似性議論は Batchelor (1969) によってなされ, 減衰性二次元乱流の数値シミュレーションを用いることで, その妥当性が Bartello & Warn (1996) によって研究された. 彼らは相似性仮説が量的に正確なものではないこと, 特に渦度の高次モーメントが理論の予測に従わないことを見つけた. この失敗は, 二次元流れにおいて渦度が保存されること, そして秩序渦があるためにこのことが理論には含まれていない効果的な束縛であることが原因と考えられる. 有限の変形半径を伴う流れにおいて秩序渦はあまり重要ではないことがわかり, よく似た相似性仮説が有効であると思われる (Iwayama *et al.*, 2002).

### 11.3.2 二次元乱流の慣性領域

三次元の場合とは異なり, 非粘性で非線形の二次元流れにおいてエネルギーが大きなスケールへ輸送されるならば, そのとき二次元乱流の慣性領域は三次元乱流の慣性領域とは非常に異なることを予測するかもしれない. しかし, 慣性領域そのものを詳細に見ていく前に二次元における強制散逸流れのもつ二つの一般的な特性を確立しよう.

#### 強制散逸流れのいくつかの特性

始めに, 三次元の場合とは異なり, レイノルズ数が上がるにつれてエネルギー散逸がゼロへ近づくことを示す. 強制項がないときには式 (11.35) から全エネルギー散逸は,

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -\nu \int \zeta^2 dA, \quad (11.56)$$

である. もし渦度が無限大となるならば  $\nu \rightarrow 0$  のときにのみエネルギー散逸は有限値に留まることができる. けれども, 粘性の作用を除いて, パーセル上で渦度が保存される, つまり  $D\zeta/Dt = \nu \nabla^2 \zeta$  であるため, このことは起きることはない. しかし, 粘性項はパーセル上の渦度の値を減らすことだけができ, もし初期にそうでない場合は渦度は無限大となることはできず, それゆえに式 (11.56) を用いて,  $\nu$  がゼロに近づくとともにエネルギー散逸はゼロへ近づく. (三次元の場合, 粘性がゼロに近づくとき, 渦の伸縮によって渦度は無限大となる.) このエネルギーの保存は, 強制散逸流れにおいてもエネルギーが大きなスケールで捕捉されていることと関係している. 一方で, エンストロフィーが小さなスケールへ輸送され, それゆえにレイノルズ数が非常に大きくなる場合にも, エンストロフィーは高波数で散逸されることを予測する.

以下の議論で強制散逸二次元流れにおいてエネルギーが大きなスケールで捕捉されることを (ある意味では明確に) 示すことができる. <sup>\*16</sup> 流体の強制は特定のスケールに限られるとし, そのスケールを  $k_f$  で示す. また, 線形摩擦と小さな粘性によって散逸が効くとする. 運動方程式は,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) = F - r\zeta + \nu \nabla^2 \zeta, \quad (11.57)$$

である. ここで,  $F$  は攪拌,  $r$  と  $\nu$  は正の定数である. これより以下のエネルギー

<sup>\*16</sup>[原文脚注 10] Arbic *et al.* (2007), Colin de Verdière (1980). Scott (2001) も見よ.

方程式とエントロピー方程式が導かれる:

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -2r\hat{E} - \int \psi F \, dA - \int \nu \zeta^2 \, dA \approx -2r\hat{E} - \int \psi F \, dA, \quad (11.58a)$$

$$\frac{d\hat{Z}}{dt} = -2r\hat{Z} + \int \zeta F \, dA - D_Z \approx -2r\hat{Z} - k_f^2 \int \psi F \, dA - D_Z. \quad (11.58b)$$

ここで,  $D_Z = \int \nu(\nabla\zeta)^2 \, dA$  はエントロピー散逸であり, 正である. 最も右の表現を得るために, 式 (11.58a) においては粘性によるエネルギー散逸はないと仮定し, 式 (11.58b) においては強制は  $k_f$  付近の波数に限られると仮定する. 統計的に定常な状態を考え,  $\hat{E} = \int \mathcal{E}(k) \, dk$  と  $\hat{Z} = \int k^2 \mathcal{E}(k) \, dk$  も書く. ここで積分は全波数にわたって実行される. このとき, 式 (11.58a) と (11.58b) の間の  $\psi F$  を含む項を消去するならば,

$$\int k^2 \mathcal{E}(k) \, dk + \frac{D_Z}{2r} = \int k_f^2 \mathcal{E}(k) \, dk, \quad (11.59)$$

を得る. 今, 明らかかな不等式  $\int (k - k_e)^2 \mathcal{E}(k) \, dk \geq 0$  より,

$$\int (k^2 - k_e^2) \mathcal{E}(k) \, dk \geq 0, \quad (11.60)$$

を得る. ここで  $k_e$  は式 (11.41) で定義されるエネルギーの重心波数である. 式 (11.59) と (11.60) から,

$$\int (k_f^2 - k_e^2) \mathcal{E}(k) \, dk \geq \frac{D_Z}{2r} > 0, \quad (11.61)$$

が与えられる<sup>\*17</sup>. したがって, 統計的に定常な状態において  $k_f$  は  $k_e$  より大きく,  $k_e^{-1}$  によって示されるエネルギー保有スケールは強制スケール  $k_f^{-1}$  より大きくななければならない. この証明は (11.3.1 節の議論 II と同様に) 非線形項によるエネルギーとエントロピーの保存と, エネルギースペクトルとエントロピースペクトルの間の特有の関係の両方に依る.

11.3.1 節の議論と同様, この結果は, 強制散逸二次元流体においてエネルギーが大きなスケールへ輸送され, エントロピーが小さなスケールへ輸送されることを示唆する. 統計的に定常な状態を得るために, 式 (11.57) のレイリー摩擦のような任意の摩擦が大きなスケールにおいてエネルギーを取り除くために必要であり, エントロピーは小さなスケールで取り除かれなければならない. しかし, もし波数空間において強制スケールがそのような摩擦の効果からうまく十分に分離されるならば, そのとき二つの慣性領域, つまりエネルギーを大きなスケールへ運ぶエネルギー慣性領域とエントロピーを小さなスケールへ運ぶエントロピー慣性

<sup>\*17</sup> エクマン摩擦がない, つまり  $r = 0$  の時, この不等式は成り立たないことに注意せよ.



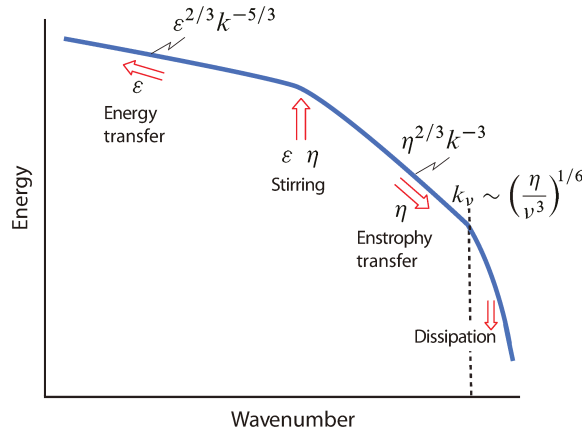


Fig. 11.7

図 11.7: 二次元乱流におけるエネルギースペクトル. (図 11.3 と比較せよ.) ある割合  $\epsilon$  で供給されるエネルギーは大きなスケールへ輸送され, 一方ある割合  $\eta$  で供給されるエンストロフィーは小さなスケールへ輸送され, そこでは粘性によってエンストロフィーは散逸されるだろう. もしあるスケール  $k_f^{-1}$  において強制が局所化されるならばそのとき  $\eta \approx k_f^2 \epsilon$  である.

領域, が形成されるだろう (図 11.7). これらの領域は 11.2 節の三次元慣性領域と似ており, もし領域が慣性によるならば, よく似た状況が適用されなければならない. つまり, 特に波数空間におけるエネルギー輸送とエンストロフィー輸送の局所性を仮定しなければならない. そのことを仮定すると, そのとき以下のような特性を見積もることができる.

### エンストロフィー慣性領域

エンストロフィー慣性領域においてエンストロフィーカスケード率  $\eta$  は, 攪拌によるエンストロフィー供給率と等しく, 定数であると仮定される. 式 (11.25) を用いた類推より, エンストロフィーカスケード率を

$$\eta \sim \frac{k^3 \mathcal{E}(k)}{\tau_k}, \quad (11.62)$$

によって与えられると仮定できる. 式 (11.24) で与えられる  $\tau_k$  (定数 (?)) を用いて,

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{K}_\eta \eta^{2/3} k^{-3}, \quad (11.63)$$

を得る. ここで  $\mathcal{K}_\eta$  は仮定上, 普遍定数であり, 式 (11.23) の Kolmogorov 定数と似ている. この相似則と, 二次元および三次元乱流における様々な他の特性は原文 423 ページの囲みにまとめられている.

このとき特定の波数における速度と時間は,

$$v_k \sim \eta^{1/3} k^{-1}, \quad t_k \sim l_k / v_k \sim 1 / (k v_k) \sim \eta^{-1/3}, \quad (11.64a,b)$$

でスケールされる. 式 (11.63) を式 (11.24) に代入することで式 (11.64) を得ることもできる. したがって, 二次元乱流のエンストロフィー慣性領域における渦回転時間は長さスケールによらない. 式 (11.35) の慣性項と粘性項を等しくすることで適切な粘性スケールが与えられる. 式 (11.28a) と同様, 式 (11.64a) を用いて粘性波数,

$$k_\nu \sim \left( \frac{\eta^{1/3}}{\nu} \right)^{1/2}, \quad (11.65)$$

を得る. 式 (11.30) と同様, エンストロフィー散逸は, 式 (11.64a) と (11.65) を用いて,

$$\frac{d}{dt} \bar{Z} = \nu \int_A \zeta \nabla^2 \zeta \, dA \sim \nu k_\nu^4 v_{k_\nu}^2 \sim \eta, \quad (11.66)$$

によって与えられる有限値へ近づく. したがって, 二次元乱流のエンストロフィー散逸は (少なくともこの理論によれば) 粘性によらない.

### エネルギー慣性領域

二次元乱流のエネルギー慣性領域はある一点を除いて三次元乱流のものと非常に似ている: エネルギーは小さなスケールから大きなスケールへ流れる! 大気と海洋はいくつかの方法で二次元流体のように振る舞うため, このことは大気と海洋の振る舞いにおいて深い重要性をもっており, 次章に帰するものである. 高級なエネルギーの流れは逆カスケードとして知られ, そのエネルギースペクトルは, 三次元の場合のように,

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{K}_\epsilon \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (11.67)$$

である. ここで,  $\mathcal{K}_\epsilon$  は無次元定数であり, 時々 Kolmogorov-Kraichnan 定数と呼ばれ. これは必ずしも式 (11.23) の  $\mathcal{K}$  と等しくない. また,  $\epsilon$  は大きなスケールへのエネルギー輸送率である. もちろん, 今大きなスケールでエネルギーを取り除くメカニズムが必要であり, そうしなければ領域のスケールにおいてエネルギーが山積みになるだろうし, 統計的に定常な状態は達成されないだろう. 式 (11.57) にあるように線形摩擦  $-r\zeta$  を渦度方程式に導入することはエネルギーを取り除く一つの手法であり, そのような項は Ekman 層に対する興味 (5.7 節) によって物理的に正当化される. そのような項は不変のスケールであるようだけれども, その効果は主に大きなスケールにおいて感じられる. なぜなら小さなスケールにおいては乱流の時間スケールは摩擦の時間スケールより非常に短いからである. そして二つの時間スケールが等しくなることで摩擦が重要となるところのスケールを見積も

ることができる. 乱流の時間スケールは式 (11.27) によって与えられ, これと摩擦の時間スケール  $\tau^{-1}$  が等しくなることで  $\tau^{-1} = \epsilon^{-1/3} k_r^{-2/3}$  もしくは,

$$k_r = \left( \frac{r^3}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad \text{or} \quad L_r = \left( \frac{\epsilon}{r^3} \right)^{1/2}, \quad (11.68)$$

が与えられる. ここで,  $k_r$  は摩擦波数であり, 摩擦のスケール  $L_r$  より大きいスケールにおいては摩擦の効果が重要である.

### 11.3.3 より深い現象論<sup>\*18</sup>

二次元乱流の現象論は, 上の議論が示唆するようにそれほど決まらない. 例えば, 時間スケール (11.64b) は長さスケールに依らないが, 三次元乱流では時間スケールは長さスケールとともに減少し, このことはより物理的で, 波数空間における局所的な相互作用にもより繋がることに注意せよ. この局所性に関して有用な指標は,  $k^{-1}$  より大きいすべてのスケールにおける運動から歪速度  $S(k)$  に対する寄与を見積もることで与えられる. 歪速度はシアーのようにスケールされ, よって全歪速度の見積もりは,

$$S(k) = \left[ \int_{k_0}^k \mathcal{E}(p) p^2 dp \right]^{1/2}, \quad (11.69)$$

で与えられる. ここで,  $k_0$  はそこで最も大きいスケールの波数である. 任意の波数の差から被積分関数に対する寄与は,

$$\int_p^{2p} \mathcal{E}(p') p'^3 d \log p' \sim \mathcal{E}(p) p^3, \quad (11.70)$$

で与えられる. 三次元の場合,  $-5/3$  乗のスペクトルを用いることで, 各オクターブから任意の波数  $k$  より低波数への寄与は波数とともに増加し, 最大値はほぼ  $k$  であることを示す. そして, このことは経験的に局所性仮説と整合的である. しかし,  $-3$  乗のスペクトルをもつ二次元乱流において各オクターブは同じ寄与をもたらす. つまり, 任意の波数において歪速度への寄与は, 式 (11.69) で定義されるように, 波数空間において局所的ではない. このことは, エンストロフィー輸送が波数空間において非局所的であることを証明せず, また理論において自信を得ることもない.

次元的には歪速度は時間の逆数であり, もし歪速度が波数空間において非局所的な量であるならば, そのとき式 (11.24) の代わりに,

$$\tau_k = \left[ \int_{k_0}^k p^2 \mathcal{E}(p) dp \right]^{-1/2}, \quad (11.71)$$

<sup>\*18</sup>この節の捕捉に関しては付録 C を参照.

で与えられる渦回転時間として歪速度の逆数を用いるかもしれない。このことは、渦回転時間が波数の非増加関数であるという点で式 (11.24) よりも多くの利点があるが、一方でもしスペクトルが  $k^{-3}$  よりも急であるならば、式 (11.24) は時間スケールが波数とともに増加することを示す。式 (11.62) に式 (11.71) を用いることでエンストロフィー慣性領域に対する予測、つまり、

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{K}_\eta \eta^{2/3} [\log(k/k_0)]^{-1/3} k^{-3}, \quad (11.72)$$

を得る<sup>\*19</sup>。これは対数補正を除いて式 (11.63) と似ている。もちろんこの表現はもとの仮説と正反対で波数空間において非局所的である。つまりもとの仮説は、式 (11.69) で固有の波数的な局所性を注意し、特別ではあるが合理的な解を提示することで生じる。

上記の議論は、エンストロフィーの順カスケードの現象論が境界上で内部的に(?) 矛盾的であることと、 $k^{-3}$  乗のスペクトルの傾きは、荒っぽくて普遍的な傾きというよりはむしろ自然もしくはある特定の数值シミュレーションもしくは室内実験において実際に達成されるような最も浅い極限であるかもしれないということを示唆している。このことを調べるために、詳細な流体力学がいくつかの方法で  $k^{-3}$  よりも浅い傾きを形成しようとしていると仮定しよう。そのとき、式 (11.70) を用いて、歪みは局所的であり、Kolmogorov スケーリングの結果から浅い傾きは禁じられている。しかしながら、もし力学が自身を  $k^{-3}$  よりも急な傾きをもつ構造のなかに取り入れるならば、歪みは非常に非局所的である。Kolmogorov スケーリングの基本的な仮定は満たされておらず、慣性的な矛盾はない。よって理論が単に適用されず、 $k^{-3}$  よりも急な傾きは理論的には矛盾していない。

二次元乱流の理論にはポテンシャルに関してほかに二つの問題がある。ひとつは、エンストロフィーが非粘性二次元流れにおいて無限大で唯一の不変量であり、理論はその他の側面を捉えることはないことである。ふたつは、三次元乱流のようにもし強い断続性があるならば、一つのエンストロフィーカスケード率とエネルギーカスケード率で流れを完全に特徴づけることはできないことである。二次元乱流における断続性の主な形式とは秩序渦の構造であろうし、さらに後に議論される。このような問題があるにも関わらず、エンストロフィーの順カスケードとエネルギーの逆カスケードに関する表記は非常に大雑把なものであり、たくさんの数値的な支えがある。もちろん、二次元乱流においてエネルギーが大きなスケールへ輸送されるという理解はおそらく二十世紀後半の流体力学の中で最も重要な発展の一つであり、回転成層三次元乱流の重要な分岐を伴う<sup>\*20</sup>。

<sup>\*19</sup>導出は付録 C 参照。

<sup>\*20</sup>[原文脚注 11] 例えば、Peltier & Stuhne (2002) と Smith & Waleffe (1999)。

### 11.3.4 数値的な描像

数値シミュレーションは、古典的な現象論とその欠陥の両方をよく表している。図 11.8 に示されるシミュレーションにおいて渦度場は準ランダムに初期化されており、初期場に小さな構造をもち、ゼロでないフーリエ成分を少し伴うだけである。よって弱い粘性の効果があるだけで流れは自由に発展する。

渦はすぐに変形し、それらの間でエンストロフィーは小さなスケールへカスケードし、そこで散逸され、平坦でほとんど特徴のない場を形成する。大きなスケールへのエネルギーカスケードは流線関数場 (図 11.8 の下段) へ反映され、長さスケールが時間とともにゆっくりと大きく成長する。渦そのものは、図 9.6 で示されものと似た巻き上げ機構を通じて変形し、それらがあることで現象論に問題が生じる。円形の渦は非粘性の方程式系のほとんど厳密で安定した解であるから、渦はエンストロフィーを‘溜める’ことができ、エンストロフィーフラックスと、Kolmogorov-Kraichnan の現象論で仮定したエンストロフィーそのもの間の関係を分ける。渦が集まると、エンストロフィー散逸率が短時間で急速に増加し、その結果断続性の原因を与える。

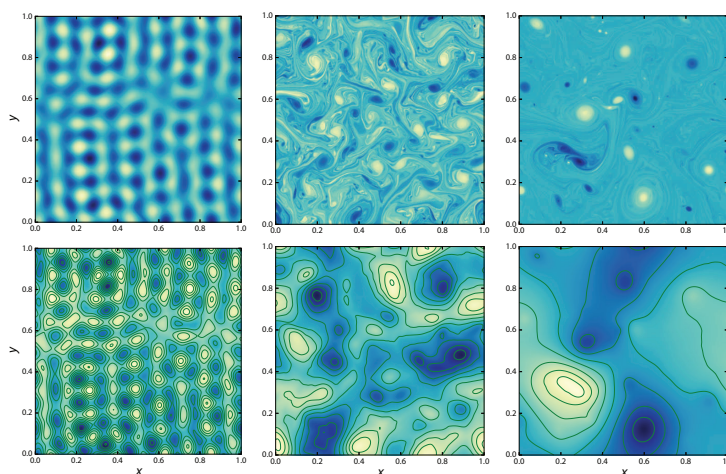


Fig. 11.8

図 11.8: 等間隔な格子点を  $512^2$  個もつ数値シミュレーションにおいて、二重周期の領域中で強制は無いが弱い粘性項をもつ二次元渦度方程式に従う渦度 (上) と流線関数 (下) の自由発展の様子。左から右へ時間が進む。初期条件は、単にゼロではないフーリエモード (波数 9 付近) を少しもつが、ランダムに生成される位相を伴う。Kelvin-Helmholtz 不安定が渦の変形と、(図 9.6 にあるような) 巻き上げを導き、同符号の渦が集まり (例えば右上図)、最終的に単に二つの逆符号の渦の状態へに達する。渦の間でエンストロフィーが小さなスケールへカスケードする。流線関数のスケールは大きく成長し、大きなスケールへのエネルギーカスケードを反映している。

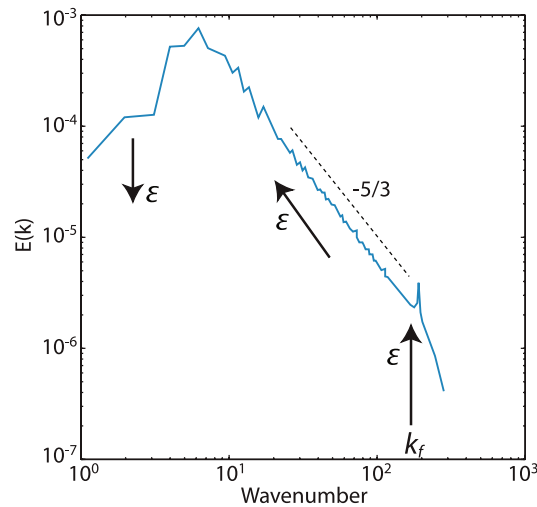


Fig. 11.9

図 11.9: 強制散逸二次元乱流の数値シミュレーションにおけるエネルギースペクトル. 流体は波数  $k_f$  で攪拌され, 線形摩擦を伴い大きなスケールで散逸され, 中間スケールでは  $k^{-5/3}$  乗のスペクトルがある. 矢印はエネルギーフラックス  $\epsilon$  の方向を示す<sup>\*21</sup>.

にもかかわらず, いくつかの強制散逸数値シミュレーションは, 渦のスケールは強制スケールに近いものに制限されるだろうし, もし解像度が十分に高いならば, そのとき  $-5/3$  の逆カスケードと,  $-3$  乗のエンストロフィーの順カスケードが現れる. 確かに, もし強制が波数空間において局所的ならば, そのとき図 11.9 にあるように, 明確に定義される  $-5/3$  乗のスペクトルが大雑把に形成される. 順方向の  $k^{-3}$  乗のスペクトルは典型的により鋭敏であり, 秩序渦の影響を受けるが, 解像度が十分に高い時にいくつかの数値シミュレーションにおいてそのスペクトルが生じる<sup>\*22</sup>. 大気そのものでは大きなスケールでの逆方向の  $-5/3$  乗のスペクトルをもつことは観測されていない. もちろん, 上で述べた意味では明確に定義されるエネルギーの逆カスケードが無い. 大気は近似的な  $-3$  乗のカスケードをもつが (次章の図 12.9 を見よ), これを古典的なエンストロフィーの順カスケードに帰すべきかどうかは確立されていない.

<sup>\*21</sup>[原文脚注 12] Maltrud & Vallis (1991) から引用.

<sup>\*22</sup>[原文脚注 13] 二次元乱流のこれらの特性とその他の特性を示す数値シミュレーションに関しては, 中でも, McWilliams (1984), Maltrud & Vallis (1991), Oetzel & Vallis (1997), Lindborg & Alvelius (2000) そして Smith *et al.* (2002) を見よ. 望遠鏡を通して木星も見よう! 二次元乱流において少しの渦に対して時間変化率 (?) があるという統計力学的な議論が Onsager (1949) によってなされた.

## 付録 A: 波数空間における支配方程式の導出

本文中の式 (11.10) から始める:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\zeta}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} &= \sum_{\mathbf{p}} p_x \tilde{\psi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \times \sum_{\mathbf{q}} q_y \tilde{\zeta}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &\quad - \sum_{\mathbf{p}} p_y \tilde{\psi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \times \sum_{\mathbf{q}} q_x \tilde{\zeta}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

この式に,

$$\tilde{\zeta}(\mathbf{k}) = -k^2 \tilde{\psi}(\mathbf{k}), \quad (\text{A.2})$$

を適用して整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \tilde{\zeta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} q^2 (p_x q_y - p_y q_x) \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}, \quad (\text{A.3})$$

両辺に  $e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}$  を掛けて全領域で積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} q^2 (p_x q_y - p_y q_x) \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}'), \quad (\text{A.4})$$

となり, 左辺を計算し整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} \frac{q^2}{k^2} (p_x q_y - p_y q_x) \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}), \quad (\text{A.5})$$

となる. また,  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{q}$  を入れ替えることで以下のようにも表せる:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} \frac{p^2}{k^2} (p_y q_x - p_x q_y) \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}). \quad (\text{A.6})$$

これら二つの表現を足して 2 で割ることで移流項を  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{q}$  に関して対称的な表現を得る:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} \frac{(q^2 - p^2)(\mathbf{p} \times \mathbf{q})_z}{2k^2} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}). \quad (\text{A.7})$$

## 付録 B: エネルギー方程式とエンストロフィー方程式の導出

非圧縮性の順圧流れに対する渦度方程式,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) = F + \nu \nabla^2 \zeta, \quad (\text{B.1})$$

からエネルギー方程式とエンストロフィー方程式を得る.

### エネルギー方程式の導出

式 (B.1) の両辺に  $-\psi$  を掛けると, 左辺は,

$$\begin{aligned} -\psi \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \psi J(\psi, \zeta) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\psi \zeta) + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial t} - J\left(\frac{1}{2}\psi^2, \zeta\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\psi \zeta) + \nabla \cdot \left( \nabla \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \nabla \psi \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi - \left\{ \nabla \times \left( \frac{1}{2}\psi^2 \nabla \zeta \right) \right\} \cdot \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\psi \zeta) + \nabla \cdot \left( \nabla \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \psi|^2 - \left\{ \nabla \times \left( \frac{1}{2}\psi^2 \nabla \zeta \right) \right\} \cdot \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

となる. 式 (B.1) を周期境界条件のもとで流れの領域にわたって積分すると上式の右辺第二項と第四項は消える. また, 粘性項は,

$$-\nu \int_A \psi \nabla^2 \zeta dA = -\nu \int_A \psi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dA - \nu \int_A \psi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dA, \quad (\text{B.3})$$

であり, 右辺第一項に対して部分積分を実行すると,

$$\begin{aligned} -\nu \iint \psi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx dy &= -\nu \int dy \left\{ \left[ \psi \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] - \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx \right\} \\ &= \nu \int dy \left\{ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \zeta \right] - \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \zeta dx \right\} \\ &= -\nu \iint \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \zeta dx dy, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

となり, 同様に右辺第二項は,

$$-\nu \iint \psi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dx dy = -\nu \iint \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \zeta dx dy, \quad (\text{B.5})$$



となり, これらをまとめると, 式 (B.3) は,

$$\begin{aligned} -\nu \int_A \psi \nabla^2 \zeta \, dA &= -\nu \iint \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \zeta \, dx dy \\ &= -\nu \int_A \zeta^2 \, dA, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

と書ける. したがって, 本文中の式 (11.37a) と (11.39) を用いると, エネルギー方程式,

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = - \int_A \psi F \, dA - \nu \int_A \zeta^2 \, dA, \quad (\text{B.7})$$

を得る.

### エンストロフィー方程式の導出

式 (B.1) の両辺に  $\zeta$  を掛けると, 左辺は,

$$\begin{aligned} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta J(\psi, \zeta) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) + J \left( \psi, \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) + \left\{ \nabla \times \left( \psi \nabla \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \right\} \cdot \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

となる. これを周期境界条件のもとで流れの領域にわたって積分すると右辺第二項は消え, 本文中の式 (11.37b) を用いると, エンストロフィー方程式,

$$\frac{d\hat{Z}}{dt} = \int_A \zeta F \, dA - \nu \int_A |\nabla \zeta|^2 \, dA, \quad (\text{B.9})$$

を得る.

### 粘性がゼロに近づく場合

今, 強制がない場合, 式 (B.7) と (B.9) よりエネルギー方程式とエンストロフィー方程式はそれぞれ以下のように書ける:

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -2\nu \hat{Z}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{d\hat{Z}}{dt} = -2\nu \hat{P}. \quad (\text{B.11})$$

ここで、パリンストロフィー ( Palinstrophy )  $\hat{P}$ ,

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \int_A |\nabla\zeta|^2 dA, \quad (\text{B.12})$$

である。  $\hat{Z} > 0, \hat{P} > 0$  より  $d\hat{E}/dt < 0, d\hat{Z}/dt < 0$  である。ここで、粘性がゼロに近づく極限 ( $\nu \rightarrow 0$ ) を考える。  $d\hat{Z}/dt < 0$  より  $\hat{Z}$  は時間とともに減少する。つまり、初期時刻におけるエンストロフィーがある有限値  $\hat{Z}_0$  であるならば、後の時刻において  $\hat{Z} < \hat{Z}_0$  である。よって、エネルギー方程式は、

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \lim_{\nu \rightarrow 0} -2\nu\hat{Z}_0 = 0 \quad (\text{B.13})$$

となる。一方、パリンストロフィーの発展方程式 ( $d\hat{P}/dt = \dots$ ) は非線形項に由来する項が含まれるために正負の判別ができない。そこで、粘性がある場合には渦度の等値線が近づけないことから、粘性がゼロに近づく場合は  $\nabla\zeta \rightarrow \infty$  となり、 $\hat{P}$  は発散すると考える。このとき、特に粘性がゼロに近づくよりも  $\hat{P}$  が速く発散する場合には  $d\hat{Z}/dt \neq 0$  となる。

### 付録 C: 11.3.3 節の補足

非圧縮性流体において、渦の変形を決める運動はずれ (歪み) 運動であるため、ここではその運動を特徴づける物理量である歪速度に着目し、慣性領域におけるスペクトルの表現を得よう。歪速度  $S(k)$  は時間の逆数の次元をもつ。これは渦度と同様であることから、Kolmogorov の現象論での仮定に基づいて、エネルギースペクトル  $\mathcal{E}(k)$  を用いて歪速度を表すならば、そのとき歪速度の局所的な表現  $S_l(k)$  は、

$$S_l(k) \sim \{\mathcal{E}(k)k^3\}^{1/2} \quad (\text{C.1})$$

と書ける。また、カスケードにおいて渦がより小さなスケールの渦へ分裂することから、着目する渦はスケールの異なる渦からの影響を受けることが考えられる。よって、歪速度の非局所的な表現  $S_{nl}(k)$  は、

$$S_{nl}(k) \sim \left\{ \int_{k_0}^k \mathcal{E}(p)p^2 dp \right\}^{1/2}, \quad (\text{C.2})$$

と書けるだろう。ここで、 $k_0$  は慣性領域における最低波数 (もしくは強制波数) である。

はじめに、式 (C.1) と (C.2) の  $\mathcal{E}(k)$  に、三次元乱流におけるエネルギー慣性領域でのエネルギースペクトルの表現  $\mathcal{E}(k) \sim k^{-5/3}$  を代入すると、それぞれ、

$$S_l(k) \sim (k^{-5/3} \cdot k^3)^{1/2} = k^{2/3}, \quad (\text{C.3})$$

$$S_{nl}(k) \sim \left\{ \int_{k_0}^k p^{-5/3} \cdot p^2 dp \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (k^{4/3} - k_0^{4/3})^{1/2}, \quad (\text{C.4})$$

となる。ここで、慣性領域が十分に広い、つまり  $k \gg k_0$  と仮定すると、式 (C.4) は、

$$S_{nl}(k) \approx k^{2/3}, \quad (\text{C.5})$$

となる。式 (C.3) と (C.5) の表現が一致していることから、三次元乱流のエネルギー慣性領域では局所的な相互作用が効いていることがわかる。

次に、式 (C.1) と (C.2) の  $\mathcal{E}(k)$  に、二次元乱流のエンストロフィー慣性領域におけるエネルギースペクトルの表現  $\mathcal{E}(k) \sim k^{-3}$  を代入すると、それぞれ、

$$S_l(k) \sim (k^{-3} \cdot k^3)^{1/2} = k^0, \quad (\text{C.6})$$

$$S_{nl}(k) \sim \left\{ \int_{k_0}^k p^{-3} \cdot p^2 dp \right\}^{1/2} = \{\log(k/k_0)\}^{1/2}, \quad (\text{C.7})$$

となる。よって、この場合、二つの表現が一致しないことがわかる。式 (C.6) から歪速度 (もしくは特性時間) が波数によらず、このことは非物理的であると考えられる。一方で、式 (C.7) の形から、 $k$  とともに  $S_{nl}(k)$  (もしくは特性時間) が増加 (減少) することがわかる。このことは物理的であることから、二次元乱流のエンストロフィー慣性領域では非局所的な相互作用が重要であろう。

最後により一般的な場合を考える。つまり、式 (C.2) に  $\mathcal{E}(k) \sim k^{-n} (n \neq 3)$  を代入すると、

$$S_{nl}(k) = \left\{ \int_{k_0}^k p^{-n} \cdot p^2 dp \right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3-n}} (k^{3-n} - k_0^{3-n})^{1/2}, \quad (\text{C.8})$$

となる。ここで、 $k \gg k_0$  の仮定のもとでは、

$$S_{nl}(k) \approx \begin{cases} k^{\frac{3-n}{2}} & \text{for } n < 3, \\ k_0^{\frac{3-n}{2}} & \text{for } n > 3 \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

であることがわかる。これより、 $n < 3$  においては局所的な相互作用が効き、一方で  $n > 3$  では、 $k$  よりも小さな波数での非局所的な相互作用が効くことがわかる。ここで、 $n = 3$  を境として歪速度が波数に依存する、もしくは依存しないことに注意する。

本文中の式 (11.72) の導出

本文中の式 (11.62) と渦回転時間 (11.71) を用いると、エンストロフィー散逸率  $\eta$  は、

$$\eta = \mathcal{K} k^3 \mathcal{E}(k) \tau_k^{-1} = \mathcal{K} k^3 \mathcal{E}(k) \left\{ \int_{k_0}^k p^2 \mathcal{E}(p) dp \right\}^{1/2}, \quad (\text{C.10})$$

と表せる。ここで、 $f(k) = k^3 \mathcal{E}(k)$  とおくと、上式は、

$$\eta = \mathcal{K} f(k) \left\{ \int_{k_0}^k p^{-1} f(p) dp \right\}^{1/2}, \quad (\text{C.11})$$

と書き換えられる。今、エンストロフィー慣性領域において  $\eta$  は定数とし、式 (C.11) を自乗し、 $k$  で微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dk} \left[ \{f(k)\}^2 \left\{ \int_{k_0}^k p^{-1} f(p) dp \right\} \right] \\ &= 2f(k) \frac{df}{dk} \left\{ \int_{k_0}^k p^{-1} f(p) dp \right\} + \{f(k)\}^2 \cdot k^{-1} f(k), \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{\{f(k)\}^2} \frac{df}{dk} = -\frac{1}{2} \left\{ \int_{k_0}^k p^{-1} f(p) dp \right\}^{-1} k^{-1}, \quad (\text{C.12})$$

となる. 式 (C.12) の波括弧内の部分は, 式 (C.11) より,

$$\left\{ \int_{k_0}^k p^{-1} f(p) dp \right\} = \frac{\eta^2}{\mathcal{K}^2 \{f(k)\}^2},$$

であるから, 式 (C.12) は  $f$  に関する微分方程式,

$$\frac{df^{-3}}{dk} = \frac{3 \mathcal{K}^2}{2 \eta^2} k^{-1}, \quad (\text{C.13})$$

に書き換えられる. この微分方程式を解くと,

$$\begin{aligned} \{f(k)\}^{-3} &= \frac{3 \mathcal{K}^2}{2 \eta^2} \int_{k_0}^k \frac{dk}{k} = \frac{3 \mathcal{K}^2}{2 \eta^2} \log(k/k_0), \\ f(k) &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \mathcal{K}^{-2/3} \eta^{2/3} [\log(k/k_0)]^{-1/3}, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

であるから,  $f(k) = k^3 \mathcal{E}(k)$  より,

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{K}_\eta \eta^{2/3} [\log(k/k_0)]^{-1/3} k^{-3}, \quad (\text{C.15})$$

である<sup>\*23</sup>. ここで,  $\mathcal{K}_\eta \equiv (2/3)^{1/3} \mathcal{K}^{-2/3}$  である.

<sup>\*23</sup>この導出方法は, 一般化された二次元流体系である  $\alpha$  乱流系での議論にも適用することが可能である (Watanabe & Iwayama, 2004). 彼らは Bowman (1996) で扱われた方法を用いて, 一般化された二次元流体におけるエンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルの一般形を導いた.