

第10章 波と平均流の相互作用

波と平均流の相互作用は、もしかすると時間平均もしくは東西平均などのいくつかの平均流が平均からの波型のずれとどのように相互作用するのかということと関連があり、この章では、この話題に関する初等的な導入を与える。‘初等的’であるのは、導出と議論が、適切な原理を示すような最も簡単な場合における運動方程式系の素直な操作によって得られるためである。我々が行うことにおいて暗黙であることは、場を平均といくつかのずれに分解することが実用的なものであるということであり、そのような一つの場合とは、ずれが小さな振幅をもつときである。平均からのずれ、つまり一般的に渦と呼ばれるもの、は実際に小さいとは限らない。例えば、中緯度の対流圏において渦はしばしば平均流と似た振幅をもち、12章と13章では乱流の立場からこのことを調べる。けれども、この章では渦が本当に小さな振幅をもつことと、特に波と平均流の相互作用が渦と渦の相互作用よりも大きいことを仮定する。

波とは、少なくとも近似的には、分散関係を満たす渦である。分散関係があるために多くの結果が得られることが可能になるが、別のやり方ではそれらの結果は我々の手の届かないところにある。このように波を定義する際に暗黙なことであるが、一般的に波は小さな振幅をもつ。なぜなら、運動方程式が適切に線形され、(いくつかの波は有限の振幅をもち、依然として分散関係を満たすけれども) 分散関係式が得られ、そして平均流との相互作用が計算されることを許しているのは小さな振幅であるからである。それからそのような相互作用の定性的な性質は有限振幅問題に理解を与えることができ、波と平均流の相互作用の理論の目的は、より現実的な状況を定性的に理解する方法を与え、非線形問題の観測と数値解の両方を解析するために用いることのできる診断を提示することである。この章では、主に東西平均を取り扱う。なぜなら簡単な境界条件があるために東西平均は最も簡単でしばしば有用なケースであるからである。またここでは最も明確に概念が示されることから、ブシネスク力学を用いて、主に β 面上の準地衡力学 (と、それからロスビー波) も取り扱う。したがって、この章では読者はそのような問題に対する導入を‘変形オイラー平均’、‘EP フラックス’そして‘非加速定理’として理解していき、この章の後に、いくつかの関連する考え方がノーマルモードに頼ることなしに流れの安定性を調べるためにどのように使われているのかを見ていく。実際の例が気

になるせつかな読者は初めに 15 章と 17 章を見てから、必要に応じてこの章に戻ることができる。

10.1 準地衡流の波と平均流相互作用

10.1.1 準備

力学的な系と表記を定めるために、ブシネスク近似を用いた準地衡流ポテンシャル渦度方程式を書き下す:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = D. \quad (10.1)$$

ここで, D は任意の非保存項を示し, ブシネスク系のポテンシャル渦度は

$$q = \beta y + \zeta + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} b \right), \quad (10.2)$$

である. ここで, ζ は相対渦度, b は N^2 で特徴づけられる背景の状態からの浮力擾乱である. (理想気体においては $q = \beta y + \zeta + (f_0/\rho_R)\partial_z(\rho_R b/N^2)$ であり, ρ_R は特定の密度分布である. 導出の多くはこの場合に拡張され得る.) 我々は b を等エントロピー線とみなすだろう. 流線関数を用いると, 変数は,

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad b = f_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad q = \beta y + \left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \psi, \quad (10.3)$$

であり, $\nabla^2 \equiv (\partial_x^2 + \partial_y^2)$ である. 流体内部においてポテンシャル渦度方程式が満たされる. 式 (10.3) の境界条件は熱力学方程式,

$$\frac{\partial b}{\partial t} + J(\psi, b) + wN^2 = H, \quad (10.4)$$

によって与えられる. ここで H は加熱項を表す. 地形とエクマン摩擦がないために鉛直方向の速度 w はゼロであり, もし H もゼロならば, 境界条件は単に,

$$\frac{\partial b}{\partial t} + J(\psi, b) = 0, \quad (10.5)$$

である. 方程式系 (10.1) と (10.5) は系に対する時間発展方程式であり, もし D と H の両方がゼロならば, 全エネルギー \hat{E} と全エントロフィー \hat{Z} の両方が保存される:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{E}}{dt} &= 0, & \hat{E} &= \frac{1}{2} \int_V (\nabla \psi)^2 + \frac{f_0^2}{N^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dV, \\ \frac{d\hat{Z}}{dt} &= 0, & \hat{Z} &= \frac{1}{2} \int_V q^2 dV. \end{aligned} \quad (10.6)$$

ここで, V は, 法線速度がゼロとなる表面に囲まれた体積, もしくは周期境界条件をもつ体積である. 層ごとにエンストロフィーも保存される. つまり, 各レベルにおいて q^2 の水平方向の積分が保存される.

10.1.2 線形方程式系におけるポテンシャル渦度フラックス

場を平均 (バー付きで示される) と擾乱 (プライム付きで示される) に分解し, 擾乱場は小さな振幅をもつと仮定しよう. (線形問題においては, 9章で考えたように流れを ‘基本状態’ (定常) と擾乱に分解した. ここでのアプローチは類似的であるが, 間もなく平均状態が発展することを許す.) そのとき, 線形化された準地衡流ポテンシャル渦度方程式は,

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial q'}{\partial y} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = D', \quad (10.7)$$

である. ここで D' は渦の強制と散逸を表し, 流線関数を用いると,

$$(u'(x, y, z, t), v'(x, y, z, t)) = \left(-\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right), \quad (10.8a)$$

$$q'(x, y, z, t) = \nabla^2 \psi' + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right), \quad (10.8b)$$

である.

もし平均が東西平均ならばそのとき $\partial \bar{q} / \partial x = 0$ であり, (v は単に地衡流であるから) $\bar{v} = 0$ であり, 式 (10.7) は,

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = D', \quad (10.9)$$

と簡単化される. ここで,

$$\bar{q} = \beta y - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \bar{b} \right), \quad \text{and} \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \quad (10.10a,b)$$

である. ここで温度風 $f_0 \partial \bar{u} / \partial z = -\partial b / \partial y$ を用いた.

式 (10.9) に q' を掛けて, 東西平均すると以下のエンストロフィー方程式を得る:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{q'^2} = -\overline{v'q' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}} + \overline{D'q'}. \quad (10.11)$$

物理量 $\overline{v'q'}$ はポテンシャル渦度の南北フラックス^{*1} である. 右辺第一項が正 (つまり $\overline{v'q' \partial \bar{q} / \partial y} < 0$) のとき, この量は (定義により) 勾配下向きであり, そのとき

^{*1}正しくは, 「ポテンシャル渦度フラックスの南北成分」であろう.

擾乱の分散 (つまり, エンストロフィー) を増加させるように作用する. (例えばフラックスが拡散的で $\overline{v'q'} = -\kappa\partial\bar{q}/\partial y$ (ここで κ は変化するだろうがどこでも正である) のときにこのことが生じる.) この議論はひっくり返すことができる. つまり, 非粘性流 ($D = 0$) に対して, もし (9 章で傾圧不安定の標準モデルにおいて議論されたように) 波が成長しているならば, そのときポテンシャル渦度のフラックスは勾配下向きである.

式 (10.11) の右辺第二項が負ならば, もし D' が消失過程であるならば (たとえば $D' = A\nabla^2 q'$ もしくは $D' = -rq'$ (A と r が正) ならば) そのようになるように, そのとき勾配下向きの輸送によるエンストロフィー生成とエンストロフィー消失の間に統計的平衡が達せられる. もし波が安定的 (統計的に安定であると波の振幅は増えも減りもしない) で保存的 (つまり $D' = 0$) ならば, そのとき,

$$\overline{v'q'} = 0, \quad (10.12)$$

でなければならない.

境界での浮力に対して同様の結果が導かれる. 熱力学方程式 (10.5) を線形化することから始め,

$$\frac{\partial b'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial b'}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{b}}{\partial y} = H', \quad (10.13)$$

を得る. ここで H' は熱源項である. 式 (10.13) に b' を掛けて平均すると,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{b'^2}}{\partial t} = -\overline{v'b'}\frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + \overline{H'b'}, \quad (10.14)$$

を得る. したがって成長中の断熱の波は境界において浮力の勾配下向きフラックスをもつ. Eady 問題において流体内部で基本状態のポテンシャル渦度の勾配は存在せず, 式 (10.11) 中の項はすべてゼロであるが, 境界において擾乱が成長する. もし波が安定的で断熱的であるならば, そのとき式 (10.12) と類似的に,

$$\overline{v'b'} = 0, \quad (10.15)$$

である. 境界条件と (そこでの) フラックスは, デルタ関数的な境界層の構造によって流体内部でのポテンシャル渦度とそのフラックスの定義の中に取り込まれ, 5.4.3 節に示される. 不連続的な鉛直層もしくは有限個のレベルが与えられたモデルにおいては境界条件を上端と下端でのポテンシャル渦度の定義に取り入れることが一般的な方法である.

10.1.3 波と平均流の相互作用

線形問題においては普段、平均流は固定されていることと、式 (10.9) 中の東西平均項 \bar{u} と \bar{q} は y と z のみの関数であることを仮定する。けれども実際には渦と渦の相互作用によって生じる運動量フラックスの収束と熱フラックスの収束に伴って平均流が変化することを予測するだろう。これらの変化を計算するために、ポテンシャル渦度方程式 (10.1) から始め、いつもの方法で変数を東西平均と渦とで表現すると、

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{q}) + \nabla \cdot (\overline{u'q'}) = \bar{D}, \quad (10.16)$$

を得る。今、平均流は東西平均で $\bar{v} = 0$ であるから、第二項はゼロ^{*2} で、以下の式に従って平均流が発展する:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v'q'}}{\partial y} = \bar{D}. \quad (10.17)$$

同様に、境界においては平均浮力の発展方程式が、

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v'b'}}{\partial y} = \bar{H}, \quad (10.18)$$

である。

\bar{q} と \bar{b} から \bar{u} を得るために温度風平衡を用い、流線関数 Ψ を定義する。つまり、

$$f_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{b}}{\partial y}, \quad \text{より、そのとき} \quad \left(\bar{u}, \frac{1}{f_0} \bar{b} \right) = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right), \quad (10.19a,b)$$

であり、これらより式 (10.10a) を用いると、ポテンシャル渦度方程式は、

$$\bar{q}(y, z, t) - \beta y = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad (10.20)$$

である。もし式 (10.18) から内部では \bar{q} が既知で、境界において \bar{b} (つまり $f_0 \partial \Psi / \partial z$) が既知であるならば、そのとき式 (10.20) と (10.19b) を用いることで内部での \bar{u} と \bar{b} が得られる。原文 390 ページにあるグレーの囲みにも方程式系がまとめられている。

系を閉じるために渦の項そのものは式 (10.9) と (10.13) に従って発展すると仮定する。もしそれらの方程式系において渦と渦の相互作用による項を含めるならば、簡単に完全な系を取り戻すだろうし、よってそれらの項を無視すると渦と平均流の系を構築することができる。擾乱の方程式中の非線形項を消去することによ

^{*2}原文では「the first term」とあるがこれは誤りであろう。

て渦はしばしば波型であることから、この系は波と平均流の系と呼ばれる。よく似た方法で非準地衡流の波と平均流の系を構築することができる。例えば、渦と東西平均それぞれの温度場と速度場に関する分かれた方程式系が与えられたプリミティブ方程式系を用いることで系を構築することができ、17章に重力波を含む例が与えられる。

そのような系は線形のものとは異なることを理解することは重要である。線形の系を構築する際には渦の項が平均流の項と比べて小さいことを肯定的に仮定し、したがって渦と渦の相互作用による項を無視し、平均流は固定されたままとする。波と平均流の問題では同様に渦の項は小さいと仮定し、平均流を含む項は比較的に大きいことから、渦と渦の相互作用がもう一つの渦を生成するところでそれらの相互作用による項を無視する。けれども平均流の方程式 (10.16) において比較的に大きな平均流の項が無く、よって渦と渦の項を保ち、平均流を発展させる。渦の項が小さいならばそのとき平均流の効果は小さいだろうから、そのような正当化はほとんど正確なものではなく、よって平均流は固定されていることを仮定する者がいるかもしれない。実際、波と平均流の方程式系は、項の大きさとそれらの発展率について詳細な試験が与えられるような個々の場合に応じてのみ正当化でき、それは弱い非線形理論の分野である。波と平均流の問題に対するもう一つの正当化は、それらが完全系の振る舞いに目を向けるものである。

今、波そのものに関する幾分多くの特性、つまり波がどう伝播するのかと何を保存するのか、を考え、ポテンシャル渦度フラックスと、それとは関係のある Eliassen-Palm フラックスに関する議論から始める。

10.2 Eliassen-Palm フラックス

ポテンシャル渦度フラックスの (南北成分の) 渦成分は、渦度フラックスと浮力フラックスを用いて以下のように表現できる:

$$v'q' = v'\zeta' + f_0v'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b'}{N^2}\right). \quad (10.21)$$

右辺第二項は以下のように書くことができる:

$$\begin{aligned} f_0v'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b'}{N^2}\right) &= f_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v'b'}{N^2}\right) - f_0\frac{\partial v'}{\partial z}\frac{b'}{N^2} \\ &= f_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v'b'}{N^2}\right) - f_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right)\frac{b'}{N^2} \\ &= f_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v'b'}{N^2}\right) - \frac{f_0^2}{2N^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right)^2. \end{aligned} \quad (10.22)$$

ここで, $b' = f_0 \partial \Psi' / \partial z$ を用いた.

同様に相対渦度フラックスは,

$$v' \zeta' = -\frac{\partial}{\partial y} (u' v') + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v'^2 - u'^2), \quad (10.23)$$

と書くことができ^{*3}, 式 (10.22) と (10.23) を用いることで, 式 (10.21) は,

$$\boxed{v' q' = -\frac{\partial}{\partial y} (u' v') + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} v' b' \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left((v'^2 - u'^2) - \frac{b'^2}{N^2} \right)}, \quad (10.24)$$

となる. したがって, 準地衡流近似中の南北方向のポテンシャル渦度フラックスはベクトルの発散 $v' q' = \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}$ として書ける. ここで,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \equiv \frac{1}{2} \left((v'^2 - u'^2) - \frac{b'^2}{N^2} \right) \mathbf{i} - (u' v') \mathbf{j} + \left(\frac{f_0}{N^2} v' b' \right) \mathbf{k}, \quad (10.25)$$

である. 東西平均したのちに, 上の特に有用な形式が現れ, そのとき式 (10.24) は,

$$\boxed{\overline{v' q'} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{u' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \overline{v' b'} \right)}, \quad (10.26)$$

となる. このときベクトルは以下のように定義される:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{F}} \equiv -\overline{u' v'} \mathbf{j} + \frac{f_0}{N^2} \overline{v' b'} \mathbf{k}}. \quad (10.27)$$

このベクトルは (準地衡流) エリアッセン-パーム (EP) フラックス^{*4} と呼ばれ, その発散は式 (10.26) で与えられ, 極方向のポテンシャル渦度フラックス,

$$\overline{v' q'} = \nabla_x \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}, \quad (10.28)$$

を与える. ここで $\nabla_x \cdot \equiv (\partial / \partial y, \partial / \partial z)$ は子午面上の発散である. 意味が不明瞭でない限り, 南北発散の下付き文字 x を省略する.

^{*3}式 (10.23) を導出する:

$$\begin{aligned} v' \zeta' &= v' \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v'^2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (u' v') + u' \frac{\partial v'}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial v'^2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (u' v') - u' \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} (u' v') + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v'^2 - u'^2) \end{aligned}$$

ここで, $\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$ を用いた.

^{*4}[原文脚注 1] Eliassen & Palm (1961) の後にこう呼ばれる.

10.2.1 Eliassen-Palm 関係式

エンストロフィー方程式 (10.11) を $\partial\bar{q}/\partial y$ で割り, 式 (10.28) を用いると,

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = \mathcal{D}}, \quad (10.29a)$$

となる. ここで,

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{q'^2}}{2\partial\bar{q}/\partial y} \quad \mathcal{D} = \frac{\overline{D'q'}}{\partial\bar{q}/\partial y}, \quad (10.29b)$$

であり, \mathcal{F} は式 (10.27) で与えられる. 方程式 (10.29a) はエリアッセン-パーム関係式として知られ, ($\mathcal{D} = 0$ のとき) この関係式は, 波の活動度密度 \mathcal{A} に対する保存則である. (6.7.2 節で波の活動度も扱った.) もし平均流が定常であるならば, (線形近似において) 保存則は正確であり, $\partial\bar{q}/\partial y$ が $\overline{q'^2}$ の変化に比べて非常にゆっくりと変化する場合, この仮定はよい近似であろう. この例において \mathcal{A} は擬運動量密度 \mathcal{P} であるが, 他の種の波の活動度密度が存在し, その例は擬運動量密度であり, これは後に扱う.

渦の活動が消えるような壁に囲まれる子午面 A にわたって式 (10.29a) を積分すると, $\mathcal{D} = 0$ の場合,

$$\frac{d}{dt} \int_A \mathcal{A} dA = 0, \quad (10.30)$$

を得る. この積分は波の活動度, つまり擾乱の振幅に関して二次の量であり, 強制と散逸がないと保存される. 曖昧さがなければ密度という言葉を省略し, \mathcal{A} と \mathcal{P} も波の活動度とする. ('波の作用' は波の活動度と関係するが, とりわけ振動数で割られたエネルギーを意味し, 多くの問題においても保存される.) 擾乱エネルギーも擾乱エンストロフィーも線形方程式系のもつ波の活動度ではない. なぜなら, 平均と擾乱の間でエネルギーもしくはエンストロフィーの交換がありうるからである. もちろんこのようにして傾圧不安定や順圧不安定で擾乱が成長する! このことは式 (10.11) からすでに明らかであり, もしくは一般的に式 (10.7) に $D' = 0$ を与えて, q' を掛けることでエンストロフィー方程式,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q'^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla q'^2 + \mathbf{u}' q' \cdot \nabla \bar{q} = 0, \quad (10.31)$$

を得る. ここではバーは平均である (東西平均である必要はないが). これを体積 V にわたって積分すると,

$$\frac{d\hat{Z}'}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} q'^2 dV = - \int_V \mathbf{u}' q' \cdot \nabla \bar{q} dV, \quad (10.32)$$

を得る. 右辺は一般的に消えず, よって \hat{Z}' は一般的に保存されない.

10.2.2 ロスビー波の群速度に関する性質

ベクトル \mathcal{F} は波の活動度がどのくらい伝播するのかわを示す. 6 章では擾乱が, 分散関係式を満たすような平面波やほとんど平面波で構成される場合, そのとき $\mathcal{F} = \mathbf{c}_g \mathcal{A}$ であることを注意した. ここで \mathbf{c}_g は群速度であり, 式 (10.29a) は,

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{A} \mathbf{c}_g) = 0, \quad (10.33)$$

となる. これは有用な特性である. なぜならもし観測から \mathbf{c}_g を診断することができるならば式 (10.29a) を用いて波の活動度密度がどのくらい伝播するのかわを決定できる. ロスビー波の擬運動量に対するこれを明確に証明しよう.

ブシネスク近似を用いた β 面上の準地衡流方程式は, 一様な平均流の周りで線形化され, 一定の静的安定度が与えられると,

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0, \quad (10.34)$$

である. ここで $q' = [\nabla^2 + (f_0^2/N^2)\partial^2/\partial z^2] \psi'$ である. もし \bar{u} が一定ならば $\partial \bar{q}/\partial y = \beta$ である. したがって,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\nabla^2 \psi' + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right] + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad (10.35)$$

を得る.

$$\psi' = \text{Re } \tilde{\psi} e^{i(kx + ly + mz - \omega t)}, \quad (10.36)$$

の形式の解を見つけることで, 分散関係式,

$$\omega = \bar{u}k - \frac{\beta k}{\kappa^2}, \quad (10.37)$$

が見つかる. ここで $\kappa^2 = (k^2 + l^2 + m^2 f_0^2/N^2)$ であり, 群速度の各成分は以下の通り:

$$c_g^y = \frac{2\beta k l}{\kappa^4}, \quad c_g^z = \frac{2\beta k m f_0^2/N^2}{\kappa^4}. \quad (10.38)$$

また, $u' = \text{Re } \tilde{u} \exp [i(kx + ly + mz - \omega t)]$ で他の場に対しても同様であるならば, そのとき,

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -\text{Re } i l \tilde{\psi}, & \tilde{v} &= \text{Re } i k \tilde{\psi}, \\ \tilde{b} &= \text{Re } i m f_0 \tilde{\psi}, & \tilde{q} &= -\text{Re } \kappa^2 \tilde{\psi}, \end{aligned} \quad (10.39)$$

である. そのとき波の活動度密度は,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{\overline{q'^2}}{\beta} = \frac{\kappa^4}{4\beta} |\tilde{\psi}^2|, \quad (10.40)$$

である。ここで分母にある 2 の追加係数は平均操作から生じる。式 (10.39) を用いることで EP フラックス (10.27) は,

$$\mathcal{F}^y = -\overline{u'v'} = \frac{1}{2}kl|\tilde{\psi}^2|, \quad \mathcal{F}^z = \frac{f_0}{N^2}\overline{v'b'} = \frac{f_0^2}{2N^2}km|\tilde{\psi}^2|, \quad (10.41)$$

である。式 (10.38), (10.40) そして (10.41) を用いることで,

$$\boxed{\mathcal{F} = (\mathcal{F}^y, \mathcal{F}^z) = \mathbf{c}_g \mathcal{A}}, \quad (10.42)$$

を得る。もし媒質の性質がゆっくりと変化しており、よって依然として (空間的に変化する) 群速度が定義できるならば、そのときこの式は大気や数値シミュレーションの中で波の活動度がどのくらい伝播しているかを見積もるために有用な表現である。

10.2.3 モードの直交性

後に定義される ‘波の活動度ノルム’ において擾乱のモードが直交性をもつということが波の活動度の保存の直接的な結果であり、したがってその結果が特定のモードの振幅の有用な指標である^{*5}。このことを調べるために、線形化されたポテンシャル渦度方程式,

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0, \quad (10.43)$$

から始める。形式的に $\psi' = \text{Re} \exp(ikx)$ の形の解を見つけよう。ここで、 Ψ はモードの和,

$$\Psi = \sum_n \tilde{\psi}_n(y, z) e^{-ikc_n t}, \quad (10.44)$$

であり n はモードの識別子である。モードは,

$$(\bar{u}\Delta_k^2 + \bar{q}_y)\tilde{\psi}_n = c_n\Delta_k^2\tilde{\psi}_n, \quad (10.45)$$

であり、ここで,

$$\Delta_k^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) - k^2, \quad (10.46)$$

である。上端と下端の境界条件 ($z = 0, -H$) は熱力学方程式,

$$\frac{\partial b'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial b'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} = 0, \quad (10.47)$$

^{*5}[原文脚注 2] Andrews & McIntyre (1976), Ripa (1981) そして Held (1985).

で与えられ, $\partial \bar{u} / \partial z = 0$ と仮定することでさらに簡単化するならば, そのとき境界条件は,

$$\frac{\partial \psi'_z}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \psi'_z}{\partial x} = 0, \quad (10.48)$$

となる. 境界において南北方向の浮力フラックスはない. もし N^2 が一定 (重要な仮定ではない簡単化) ならば, そのとき $\tilde{\psi}_n(y, z) = \psi_n(y) \cos mz$ とすることができ, $m = j\pi/H$ で与えられ, ここで j は整数であり, モード n は今, 南北モードのみラベルされる. これと一致するポテンシャル渦度モードは,

$$q_n = \Delta_{k,m}^2 \Psi_n, \quad \Delta_{k,m}^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{N^2} m^2 - k^2, \quad (10.49)$$

で与えられ, このとき境界条件は式 (10.45) と (10.49) から構築する解に組み込まれる. ^{*6} このとき一つの東西波数と一つの鉛直波数を考えることができる. (もしシアアの水平変化がなければ南北モードは調和関数, 例えば幅 L に対して $\psi_n \propto \sin(n\pi y/L)$ である.)

ある基本状態に対して式 (10.45) を数値的もしくは解析的に解き, モードを決定することを想像できる. けれども, これらのモードは, エネルギーかエンストロフィーかのセンスでは直交性をもたない. つまり, 内積を,

$$\langle a, b \rangle \equiv \frac{1}{2L} \int_L ab \, dy, \quad (10.50)$$

で示し, そのとき一般的に $n \neq m$ に対して,

$$I_E = \langle \psi_n, q_m \rangle \neq 0, \quad I_z = \langle q_n, q_m \rangle \neq 0, \quad (10.51)$$

である. ここで $q_n = \Delta_{k,m}^2 \psi_n$ である. したがって擾乱のエネルギーとエンストロフィーは線形化された方程式系の波の活動度ではなく, 特定のモードでのエネルギーとエンストロフィーについて話すことは意味がない. けれども, 同様に波の活動度ノルムにおいて直交性を予測することができる. このことを調べ, その意味を理解するために $t = 0$ において擾乱が二つのモード n と m から成ることを仮定すると, 後の時刻においては $q = (q_n e^{-ikc_n t} + q_m e^{-ikc_m t} + \text{c.c.})$ である. ここで, $c_m \neq c_n$ であり, どちらも実数であると仮定する. 波の活動度は,

$$P \equiv \int \mathcal{A} \, dy dz = \langle q_n, q_m^* / \bar{q}_y \rangle e^{-ik(c_n - c_m)t} + \langle q_m, q_m^* / \bar{q}_y \rangle + \langle q_n, q_n^* / \bar{q}_y \rangle + \text{c.c.}, \quad (10.52)$$

である. 右辺第二項と第三項は各モードの波の活動度であり, これらは一定である (このことを調べるために擾乱が単一のモードの場合を考えよう). 今, $dP/dt = 0$

^{*6}[原文脚注 3] 基本状態におけるこれらの制限は, 直交性を証明するためには必要ではないが, それらは計算をより簡単にする. また, ここでは式 (10.45) の固有値の性質には触れないが, その固有値は一般的に離散的なスペクトルと連続的なスペクトルの両方から成る. Farrell (1984) と McIntyre & Shepherd (1987) を見よ.

であるから $c_n \neq c_m$ ならば第一項は消えるに違いなく、モードは直交性をもち、特に $n \neq m$ に対しては、

$$\operatorname{Re} \int \frac{1}{\bar{q}_y} q_n q_m^* dy = 0, \quad (10.53)$$

を示唆する。 $1/\bar{q}_y$ で重み付けられた内積は、波の活動度ノルムと定義する。波の活動度が異なるモードの振幅に対する適切な指標、例えばエネルギー、であることを意味することから、直交性は有用な結果である。波の活動度の保存は、10.6 節で与えられるように安定性に対する必要条件を特に素直に導出することで導かれるだろう。

10.3 変形オイラー平均

いわゆる変形オイラー平均もしくは TEM とは条件の広い範囲下で渦の効果を議論するのに対して有用な枠組みを与える運動方程式系の変形である。^{*7} 有用である理由は、我々が見ていくように、熱力学方程式において渦フラックスを消去し、運動方程式の中に簡単な形式で渦フラックスを集めて、それを実行する際にポテンシャル渦度フラックスの役割を明確にするような非常に自然な形式で運動方程式系を平均するからである。TEM は、非断熱効果と断熱効果、そして移流フラックスと拡散フラックスの間に自然な分かれ目も与え、流れが断熱的である場合において方程式系の求められるべき単純化も与える。後の章では TEM を用いて中緯度対流圏と南極周回流の力学をうまく理解し、渦フラックスのパラメタリゼーションに対する枠組みとして TEM を用いる。もちろん、只より高い物はないものはないように、TEM は難しさを与える。特に境界条件の実装によって、とりわけ方程式系を実際に数値積分する際に難しさが生じる。

^{*7}[原文脚注 4] TEM は Andrews & McIntyre (1976, 1981) と Boyd (1976) によって与えられた。先駆けとなったのは Riehl & Fultz (1957) の論文であり、彼らは室内実験と、延長すると大気における二次循環セルの意味を発見した際に東西平均することの欠点を注意した。

10.3.1 準地衡流の形式

簡単さのためにベータ面上のブシネスク方程式系を用いる。そのとき東西平均された東西速度と浮力に対する東西平均されたオイラー平均方程式系は、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - (f + \bar{\zeta})\bar{v} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} + \bar{F}, \quad (10.54a)$$

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{v'b'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'b'} + \bar{S}, \quad (10.54b)$$

と書くことができる*⁸。ここで \bar{F} と \bar{S} はそれぞれ摩擦項と加熱項を表し、南北速度 \bar{v} は単に非地衡流である。準地衡流スケリングを用いて、 f_0 や N^2 が掛けられるときを除いて、鉛直方向の渦フラックスの発散とすべての非地衡流速度を無視する。そのとき上の方程式系は、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = f_0 \bar{v} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \bar{F}, \quad (10.55a)$$

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = -N^2 \bar{w} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'b'} + \bar{S}, \quad (10.55b)$$

となる。これらの二本の方程式は温度風の関係、

$$f_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{b}}{\partial y}, \quad (10.56)$$

で結び付けられ、これは地衡流の v の運動方程式 ($f_0 \bar{u} = -\partial \bar{\phi} / \partial y$) と静力学方程式 ($\partial \bar{\phi} / \partial z = \bar{b}$) の結合である。式 (10.55) の理想的な側面より少ないものは、温帯低気圧においては時間に依存する場合でさえも、支配的な平衡は大抵、各方程式の右辺にある始めの二項の間にある。したがってコリオリ力が渦の運動量フラックスの発散とピッタリとバランスし、成層 ($N^2 w$, もしくは‘断熱冷却’) の平均の移流が渦の熱フラックスの発散とバランスする (このとき加熱は小さな残差である)。このことは最終的に平均子午面循環の原因であるように、非断熱加熱の重要性を少なく見積もることにつながる。さらに、温度風を通じて \bar{u} と \bar{b} の間の関係は浮力と運動量を力学的につなげ、渦のフラックスがどれほどこれらの場に影響を及ぼしているのか、つまり渦の熱フラックスや運動量フラックス、もしくはとある結合を通じているのか? ということの理解を曖昧にしている。

この問題に入るために式 (10.55b) の $N^2 w$ の項と渦のフラックスをつなげて、定常状態において非断熱項 \bar{S} とバランスされるようなひとつの全熱輸送もしくは残差熱輸送 (よって平均の項と渦の項の間の打ち消しを認識する) にする。このこと

*⁸導出は付録参照。

を実行するために、 \bar{v} と \bar{w} は質量保存の式によって関係づけられているから、以下のように平均した子午面流線関数 ψ_m を定義することができる：^{*9}

$$(\bar{v}, \bar{w}) = \left(-\frac{\partial \psi_m}{\partial z}, \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right), \quad (10.57)$$

このとき速度場は自動的に $\partial \bar{v} / \partial y + \partial \bar{w} / \partial z = 0$ を満たす。もし残差流線関数を、

$$\psi^* \equiv \psi_m + \frac{1}{N^2} \overline{v'b'}, \quad (10.58a)$$

と定義するならば、そのとき残差平均子午面循環の成分は、

$$(\bar{v}^*, \bar{w}^*) = \left(-\frac{\partial \psi^*}{\partial z}, \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right), \quad (10.58b)$$

と、

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2} \overline{v'b'} \right), \quad \bar{w}^* = \bar{w} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{N^2} \overline{v'b'} \right), \quad (10.59)$$

で与えられる。構築によって残差子午面循環は、

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} = 0, \quad (10.60)$$

を満たすことに注意する。式 (10.59) を式 (10.55a) と (10.55b) に代入すると、そのとき東西方向の運動量方程式と浮力方程式は簡単な形式、

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= f_0 \bar{v}^* + \overline{v'q'} + \bar{F}, \\ \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} &= -N^2 \bar{w}^* + \bar{S}, \end{aligned}} \quad (10.61a,b)$$

をとり、これは (準地衡流) 変形オイラー変形方程式系もしくは TEM 方程式系と知られる。ポテンシャル渦度フラックス $\overline{v'q'}$ は式 (10.26) によって熱フラックスと渦度フラックスを用いて与えられ、式 (10.28) にあるように EP フラックスと等しい。

TEM 方程式系は、渦度フラックスと熱フラックスの別々の寄与というよりもむしろポテンシャル渦度フラックスを考えて循環を強制するということを明白にす

^{*9}式 (10.55) から子午面流線関数に対する方程式、

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z^2} = \frac{1}{N^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{S} - \frac{\partial \overline{v'b'}}{\partial y} \right) - f_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \bar{F} \right) \right\},$$

が得られる。ここで式 (10.56) を用いた。

る. もし \bar{F} と \bar{S} と同様にポテンシャル渦度フラックスを知っているならば, そのとき式 (10.60) と (10.61) は, 温度風平衡,

$$f_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{b}}{\partial y}, \quad (10.62)$$

に加えて, 完全系を成す. 子午面循環は式 (10.62) を用いることで式 (10.61) から時間微分を消去することで得られ,

$$f_0^2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^2} + N^2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} = f_0 \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'q'} + f_0 \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial y}, \quad (10.63)$$

を与える. したがって, 残差循環もしくは正味の循環がポテンシャル渦度フラックス (の鉛直微分) と非断熱項によって動かされる. もちろんフラックスそのものは循環に依存するけれども, もしそれらの項を知っているならば循環を計算することができるという意味で ‘動かされる’. たとえ方程式系が安定状態になくてもこの方程式は瞬間事に適用されることに注意する.

波の活動度, 例えばロスビー波から渦のポテンシャル渦度フラックスが生じるときに TEM 形式の方程式系を用いることは特に有用である. 式 (10.28) にあるようにポテンシャル渦度フラックスは EP フラックス \mathcal{F} の発散であり, 渦が分散関係を満たすならば, 式 (10.42) にあるように EP フラックスの成分は, 波の活動度密度 A が掛けられた群速度と等しい. したがって, 群速度を知ることで波によって運動量がどのくらい運ばれるのかについてたくさんわかる. TEM を用い, 10.4 節, 10.5 節, 特に 17.3 節にある平均流加速を推論していく.

ポテンシャル渦度と, 波と平均流の相互作用の関係

式 (10.61) を交差微分すると, そのとき残差質量保存の式 (10.60) を用いた後で, 東西平均したポテンシャル渦度方程式, つまり,

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{v'q'} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}, \quad \text{where} \quad \bar{q}(y, t) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \bar{b} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (10.64a,b)$$

を取り戻す. この式は式 (10.18) と (10.20) と本質的に同じであり, 東西平均したポテンシャル渦度の定義に βy を加えることが影響なしにできることに注意する.

式 (10.7) にあるように渦のポテンシャル渦度の時間発展に一致する方程式は非粘性の形式で,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(y, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0, \quad (10.65)$$

である. 方程式系 (10.64) と (10.65) は準線形方程式の閉じた系であり, 10.1.3 節で示される波と平均流の系を取り戻した a.

10.3.2 等エントロピー座標系の TEM 方程式系

もし流体が多層の浅水系を構成するならば, また等価的に等エントロピー座標系に問題を投げるならば (3.10 節), 残差循環は解釈を明らかにする. 浅水系の表記を用いると, 運動量保存と質量保存の式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u - fv = F, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = S, \quad (10.66a,b)$$

と書くことができる. 物理量 h は厚さ, つまり二つの等エントロピー面の間隔, であり S は熱源項である. (場 h は 3.10 節の σ と同じ役割をもつ.) 準地衡流スケールリングを与えると, よってコリオリパラメータと層の厚さの変化は小さく, 慣習的な方法で東西平均すると,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v} = \overline{v' \zeta'} + \bar{F}, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + H \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{v' h'} + \bar{S}, \quad (10.67a,b)$$

を与える. これらの方程式系中のバーは等エントロピー面に沿ってとられた平均を示す (つまり与えられた層に対して平均する) が, 別の方法では慣習的であり, 南北速度は単に非地衡流である. 式 (10.59) との類推より, 残差循環を,

$$\bar{v}^* \equiv \bar{v} + \frac{1}{H} \overline{v' h'}, \quad (10.68)$$

によって定義する. ここで H は層の平均深さである. 式 (10.67) に式 (10.67) を用いることで,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v}^* = \overline{v' q'} + \bar{F}, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + H \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y} = \bar{S} \quad (10.69a,b)$$

を与える. ここで,

$$\overline{v' q'} = \overline{v' \zeta'} - \frac{f_0}{H} \overline{v' h'}, \quad (10.70)$$

は, 浅水系における南北方向のポテンシャル渦度フラックスである. 式 (10.68) から残差速度が南北方向の全厚さフラックス, 等エントロピー層での渦と平均, の指標であることがわかる. これはしばしばオイラー速度 \bar{v} よりも有用な物理量である. なぜなら一般的に外力によって制限されるのは前者であり, 後者ではないからである. もちろん, 行ったことは, 式 (10.66b) において厚さで重みづけした平均を有効に用いることである. このことを調べるために, 厚さで重みづけした平均を,

$$\bar{v}_* \equiv \frac{\overline{h v}}{\bar{h}}, \quad (10.71)$$

で定義しよう. (\bar{v}_* を用いて厚さもしくは質量で重みづけした平均を示し, \bar{v}^* を用いて残差速度を示す. あとで見えていくようにこれらの量は密接に関連している.) 式 (10.71) から,

$$\bar{v}_* = \bar{v} + \frac{1}{\bar{h}} \overline{v' h'}, \quad (10.72)$$

であり, それから, 式 (10.66b) の東西平均は単に,

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{h}\bar{v}_*) = \bar{S}, \quad (10.73)$$

であり, $H = \bar{h}$ ととるとこの式は式 (10.69b) と同じである. 同様に, もし運動方程式 (10.67a) に厚さで重みづけした速度 (10.72) を用いると, 式 (10.69a) を得る.

明らかに, 運動方程式と厚さの方程式に質量で重みづけした南北速度が使われるならば, そのとき渦の質量フラックスは明らかに方程式系に加わらない. つまり, 式 (10.69) 中の渦フラックスだけがポテンシャル渦度フラックスである. つまり, 等エントロピー座標系において TEM 形式の方程式系は, 古典オイラー平均よりもむしろ特定の形式の平均, 厚さで重みづけした平均, から生じる方程式と等しい. 今見るように高度座標系においてよく似た一致が起こる.

10.3.3 残差循環と, 厚さで重みづけした循環の関係

上の議論から明らかなことであるが, 浅水系もしくは等エントロピー座標系において残差速度は全 (つまり平均と渦) 厚さ輸送の指標である. 高度座標系における残差速度の定義 (10.58) はそのものをそのような解釈へとても簡単に導くことはない. けれども, 今わかるように, 高度座標系における残差速度は実際, 全厚さ輸送, もしくは等価的に二つの等エントロピー面の間の質量輸送の指標でもある. 特に等エントロピー層における全輸送を平均することは, 高度座標系において TEM 形式によって評価される質量輸送と等価であることを示し, 特に厚さで重みづけられた平均量 \bar{v}_* は高度座標系における残差速度 \bar{v}^* と等価であることを示す. 説明はブシネスク系に対するものであるが, 圧縮性気体への拡張は合理的に素直なものである. ^{*10}

図 10.1 にあるように平均位置が $\bar{\eta}_1$ と $\bar{\eta}_2$ で与えられる二つの等エントロピー面 η_1 と η_2 を考えよう. (ここでは鉛直座標を示すために z を用い, 等エントロピー

^{*10}[原文脚注 5] この小節の主な結果は元々, McIntosh & McDougall (1996) によって得られた. ここで与えられた導出に関して議論してくれた A. Plumb に感謝する. 実際, 厚さで重みづけられた平均量を用いることで, 東西平均ととることなしに, 完全に厳密な TEM のような方程式系を書くことは可能である. 文献は多岐にわたり, それらを理解するには時間がかかる. しかし, 読者は de Szoeke & Bennett (1993) と Young (2012) を参考にするだろう. 彼らは厚さで重みづけられた平均操作をした方程式系が導かれることを示す. それらの方程式系は, 三次元の Eliassen-Palm ベクトルの発散による渦強制の表現を除いて, 水平方向の運動方程式において重みづけしてない方程式系と同等である. これらの EP ベクトルの発散は, 準地衡流の結果 (よりも一般的だが) と似た方法で完全なポテンシャル渦度の渦フラックスに関係づけられる.

面の位置を示すために η を用いる。) これらの面の間の南北輸送は,

$$T = \int_{\eta_2}^{\eta_1} v dz, \quad (10.74)$$

によって与えられる. もし層の範囲内で速度が高度とともに変化しないのであれば (そして層の厚さがゼロに近づく極限においてこのことが問題であれば), そのとき $T = vh$ である. ここで $h = \eta_1 - \eta_2$ は等エントロピー層の厚さである. それから東西平均した輸送は,

$$\bar{T} = \frac{1}{L} \int_L T dx = \frac{1}{L} \int_L \left(\int_{\eta_2}^{\eta_1} v dz \right) dx = \overline{\int_{\eta_2}^{\eta_1} v dz} = \bar{v}h = \bar{v}h + \overline{v'h'}, \quad (10.75)$$

によって与えられる. ここでは明らかな表記を用いており, バーは東西平均を示す. 等エントロピー面間の距離をゼロに縮ませると, この結果は,

$$\bar{v}_* \equiv \frac{\overline{v\sigma^b}}{\bar{\sigma}} = \bar{v}^b + \frac{\overline{v'\sigma'^b}}{\bar{\sigma}}, \quad (10.76)$$

と書くことができる. ここで $\overline{(\cdot)^b}$ は等エントロピー面に沿う平均であり, $\bar{\sigma} = \overline{\partial z / \partial b}$ は厚さの密度, つまり二つの等エントロピー面間の厚さの指標である. 連続成層した系に対しては, 式 (10.76) は (10.72) と類似している. 平均量 \bar{v}_* は一定の高度における速度の平均に比例せず, また等エントロピー面に沿って平均することと等しい. むしろ,

準地衡流の波動平均流相互作用

波動平均流方程式系の非粘性非強制のブシネスク準地衡系は、境界において浮力が必要とされるような似た方程式に加えて、

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0, \quad (\text{WMF.1a})$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'q'} = 0, \quad (\text{WMF.1b})$$

である。渦の項は、

$$q' = \left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \psi', \quad (u', v') = \left(-\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right), \quad (\text{WMF.2a,b})$$

である。平均流の項は、

$$\bar{q}(y, t) = \beta y - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \bar{b} \right), \quad (\text{WMF.3})$$

と、

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} \right) = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \quad (\text{WMF.4})$$

である。ここで温度風の関係を用いた。平均流に対して解くために以下のように流線関数 Ψ を定義できる:

$$\left(\bar{u}, \frac{1}{f_0} \bar{b} \right) = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right). \quad (\text{WMF.5})$$

よって、

$$\bar{q}(y, t) - \beta y = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (\text{WMF.6})$$

である。式 (WMF.1b) から \bar{q} が与えられると、式 (WMF.6) を解くことで \bar{u} と \bar{b} を得る。恒等的に、式 (WMF.1b) を y に関して微分し、式 (WMF.4) を用いることで、東西風に対する一本の方程式を導くことができ、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \overline{v'q'}, \quad (\text{WMF.7})$$

を得る。

平均流の時間発展は TEM 形式で以下のようにも有益に書くことができる:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v}^* + \overline{v'q'} = 0, \quad (\text{WMF.8a})$$

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + N^2 \bar{w}^* = 0. \quad (\text{WMF.8b})$$

ここで \bar{v}^* と \bar{w}^* は楕円方程式 (10.63) を解くことで見つかかり, 式 (WMF.1a) 中で用いる $\partial \bar{q} / \partial y$ の値は式 (WMF.4) を用いることで得られる.

10.4 非加速定理

今, 先に進んで, 準地衡流の枠組みを用いることで, ポテンシャル渦度フラックスとその関係の解釈と適用を考える. 始めに波動平均流力学における重要な結果, つまり非加速条件を導く. ^{*11} この結果は一定の条件下では以下で正確に示すように, 波は平均流への正味の効果をもたず, 重要で幾分直感に反する結果をもつことを示す.

10.4.1 ポテンシャル渦度方程式からの導出

ポテンシャル渦度フラックスがどのくらい平均場に影響を及ぼすのかを考えよう. 非強制非粘性の東西方向に平均したポテンシャル渦度方程式は,

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v'q'}}{\partial y} = 0, \quad (10.85)$$

である. 今, 準地衡流理論において地衡流平衡下の速度と浮力は楕円方程式, 特に,

$$\bar{q} - \beta y = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right), \quad (10.86)$$

を通じてポテンシャル渦度から決定される. ここで $\bar{\psi}$ は $(\bar{u}, \bar{b}/f_0) = (-\partial \bar{\psi} / \partial y, \partial \bar{\psi} / \partial z)$ で表される. 式 (10.85) を y に関して微分することで,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = (\nabla \cdot \mathcal{F})_{yy}, \quad (10.87)$$

^{*11}[原文脚注 7] 非加速の議論は長い歴史をもち, Charney & Drazin (1961), Eliassen & Palm (1961), Holton (1974), 特に Boyd (1976) と Andrews & McIntyre (1978) が貢献した. Dunkerton (1980) が再検討し, 具体例を与えた. 今, 非加速は 'nonacceleration' と書かれるくらいに文献の中で流行している.

を得る. ここで $\nabla \cdot \mathcal{F} = \overline{v'q'}$ は EP フラックスの発散である (y - z 平面では, つまり $\nabla_x \cdot \mathcal{F}$). これは擬運動量に対する波の活動度の式, 式 (10.29a) を繰り返すと,

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = \mathcal{D}, \quad (10.88)$$

から決定される. 特に擬運動量について議論しているので波の活動度に対して \mathcal{P} を用いた. もし波が統計的に定常 (つまり $\partial \mathcal{P} / \partial t = 0$) で散逸がない ($\mathcal{D} = 0$) のであれば, そのとき明らかに $\nabla \cdot \mathcal{F} = 0$ である. もし境界において加速がないならば, そのとき式 (10.87) の解は,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0, \quad (10.89)$$

である. これは非加速結果である. つまり, 一定の条件下では, 平均場, 特に東西平均した東西流の平均場の時間変化は波に依存しない. 明示的には, それらの条件は以下の通りである:

- (i) 波が定常である (よって波の活動度の式を用いて \mathcal{P} が変化しない).
- (ii) 波は保存的である. つまり式 (10.29a) において $\mathcal{D} = 0$ である. これと条件 (i) が与えられると, Eliassen-Palm の関係式は $\nabla \cdot \mathcal{F} = 0$ を示し, ポテンシャル渦度フラックスはゼロである.
- (iii) 波は小さな振幅をもつ (あらゆる解析は擾乱の振幅の三次の項を無視してきた).
- (iv) 波は境界条件に影響を及ぼさない (よって加速度に対する境界の寄与がない).

それを導出した方法が与えられると, 結果は驚くべきものではないようである. けれども, それは強力であり直感に反するものである. なぜなら, 定常な波 (つまり, それらの振幅が変化しない) は平均流に影響を与えないということを意味するからである. しかし, それらはオイラー子午面転向循環には影響を与え, 相対渦度フラックスもまたゼロではないだろう. 実際, 非加速定理は我々に, 子午面循環の変化によって渦度フラックスの変化は厳密に補われることと, 東西平均した東西流に正味の影響がないことを教えてくれている. 平均流の永続的な変化を導くのは非可逆性であり, それはしばしば砕波によって明らかにされる.

hogehoge.

10.4.2 TEM を用いた非加速結果の導出

我々は TEM を用いることで非加速結果を得ることができる。説明は上記と主に同じであるが、解説は有用である。

二次元の場合

β 面上の二次元非圧縮流れを考え、境界でフラックスがないとする。線形化された渦度方程式は、

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = D', \quad (10.90)$$

であり、これから式 (10.29a) と同様に Eliassen-Palm の関係式、

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \mathcal{D}, \quad (10.91)$$

を導く。ここで $\mathcal{F} = -\overline{u'v'}$ であり、 \mathcal{D} は非保存強制を表し、

$$\mathcal{P} = \frac{\overline{\zeta'^2}}{2\partial_y \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \overline{\eta'^2} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y}, \quad (10.92)$$

である。物理量 $\eta' \equiv -\zeta'/\partial_y \bar{\zeta}$ は摂動中の流体粒子の南北方向の変位である。今、 x 方向の運動方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} + fv, \quad (10.93)$$

を考えよう。東西平均すると、 $\bar{v} = 0$ に注意して、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u\bar{v}}}{\partial y} = \overline{v'\zeta'} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \quad (10.94)$$

を得る。最後に式 (10.91) と (10.94) を結合して、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + \mathcal{P}) = \mathcal{D}, \quad (10.95)$$

を得る。非保存項がないと (つまり $\mathcal{D} = 0$ ならば) 物理量 $\bar{u} + \mathcal{P}$ は一定である。^{*12} さらに、波が定常で保存的であれば、そのとき \mathcal{P} は一定で、それゆえに \bar{u} が一定である。これは非加速結果である。

^{*12}[原文脚注 8]

成層の場合

成層の場合では運動方程式の TEM 形式を用いて似た結果を導出することができる。非強制の東西平均した東西方向の運動方程式は、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + f_0 \bar{v}^* = \nabla \cdot \mathcal{F}, \quad (10.96)$$

と書くことができ、Eliassen-Palm 関係式 (10.29a) を用いることで、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} + \mathcal{P}) - f_0 \bar{v}^* = \mathcal{D}, \quad (10.97)$$

と書くことができる。再び \mathcal{P} は流れの運動量と関係づけられる。それゆえ、波が定常 ($\partial \mathcal{P} / \partial t = 0$) で保存的 ($\mathcal{D} = 0$) であるならば、その時 $\partial \bar{u} / \partial t - f_0 \bar{v}^* = 0$ である。けれども、同じ条件下では残差循環もゼロとなる。なぜなら、温度風バランスにある温度場と速度場を保つための必要性を経て残差子午面循環 (\bar{v}^*, \bar{w}^*) が生じ、従って楕円方程式、つまり式 (10.63) によって決定されるからである。もし波が定常で断熱的であるならば、そのとき $\overline{v'q'} = 0$ であるから、方程式の右辺はゼロであり、

$$f_0^2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^2} + N^2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} = 0, \quad (10.98)$$

となる。境界において $\psi^* = 0$ であるならば、そのときこの唯一解はどこでも $\psi^* = 0$ である。南北方向の境界においては境界が静止緯度にあるならば ψ^* は消えると必ず仮定し、水平方向の境界においては波が定常ならば浮力フラックスは消えるだろう。なぜなら、式 (10.14) から、

$$\frac{\overline{v'b'}}{v'b'} \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{b'^2} = 0, \quad (10.99)$$

であるからである。これらの条件下では、そのとき内部領域で残差子午面循環は消え、式 (10.96) から平均流は定常であり、したがって非加速結果を再現する。

式 (10.96) を伝統的オイラー形式の運動方程式、つまり、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v} = \overline{v'\zeta'}, \quad (10.100)$$

と比較しよう。たとえ波が定常であっても、波があるときには渦度フラックスが消えるべきであるという理由はない。

付録: 本文中の式の導出

式 (10.54) の導出

ここでは式 (10.54) を導出する. ブシネスク方程式系から始め, 運動方程式,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{f} \times \mathbf{v} = -\nabla\phi + b\mathbf{k} + \mathbf{F}, \quad (\text{A.1})$$

と, 連続の式,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.2})$$

である. ここで, \mathbf{v} は速度場, ϕ はジオポテンシャル, b は浮力, \mathbf{f} はコリオリパラメータ, \mathbf{F} は強制項を表す. 今, 方程式系にある物理量を東西平均した量と, それからのずれに分ける:

$$A(x, y, z, t) = \bar{A}(y, z, t) + A'(x, y, z, t). \quad (\text{A.3})$$

すると, 運動量方程式 (A.1) は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' + \mathbf{f} \times \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{f} \times \mathbf{v}' \\ = -\nabla \bar{\phi} - \nabla \phi' + \bar{b}\mathbf{k} + b'\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となり, この式を東西平均すると,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + \overline{(\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}'} + \mathbf{f} \times \bar{\mathbf{v}} = -\nabla \bar{\phi} + \bar{b}\mathbf{k}, \quad (\text{A.5})$$

が得られる. また, 連続の式 (A.2) は,

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') = 0, \quad (\text{A.6})$$

となり, この式を東西平均すると,

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (\text{A.7})$$

となる. 式 (A.6) と (A.7) より,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (\text{A.8})$$

とわかる. この式に \mathbf{v}' を掛けて東西平均すると,

$$\overline{\mathbf{v}'(\nabla \cdot \mathbf{v}')} = 0, \quad (\text{A.9})$$

が得られ, (A.5) と (A.9) を足し合わせることで,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + \nabla(\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}) + \mathbf{f} \times \bar{\mathbf{v}} = -\nabla \bar{\phi} + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{k}, \quad (\text{A.10})$$

であることがわかる^{*13}. この式の x 成分を取り出すと,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} - f\bar{v} = \bar{F}_x \quad (\text{A.11})$$

である. ここで, $\partial \bar{A} / \partial x = 0$ であることに注意する. さらに $\bar{\zeta} = \partial \bar{v} / \partial x - \partial \bar{u} / \partial y = -\partial \bar{u} / \partial x$ であることを用いて, 上式の左辺第二項を書き換えて, 整理することで, 東西平均した東西流 \bar{u} に対する運動方程式,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - (\bar{\zeta} + f)\bar{v} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} + \bar{F}_x, \quad (\text{A.12})$$

が導かれる.

また, 浮力の式,

$$\frac{Db}{Dt} = S, \quad (\text{A.13})$$

を, 東西平均した量と, そえからのずれに分解すると,

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \frac{\partial b'}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{b} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla b' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{b} + \mathbf{v}' \cdot \nabla b' = \bar{S} + S', \quad (\text{A.14})$$

であり, この式を東西平均すると,

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{b} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla b'} = \bar{S}, \quad (\text{A.15})$$

となる. ここで式 (A.8) に b' を掛けて東西平均すると,

$$\overline{b' \nabla \cdot \mathbf{v}'} = 0, \quad (\text{A.16})$$

が得られ, 式 (A.15) とこの式を足し合わせることで,

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{b} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}'b'}) = \bar{S}, \quad (\text{A.17})$$

となり, これを成分表示にすると,

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{v'b'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'b'} + \bar{S}, \quad (\text{A.18})$$

が導かれる.

^{*13}[めも] 式 (A.10) の左辺第三項の表記が誤っている.