1.1 二次元乱流のカスケードに関する証明

ここでは, 二次元乱流のカスケードに関する証明を行う.

1.1.1 準備

以下の方程式系を出発点とする:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial t} &= -\boldsymbol{u}\cdot\nabla q, \qquad (1.1)\\
q = \nabla^2\psi, \quad \boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{j}\\
\psi(\boldsymbol{r}) &= \sum_{\boldsymbol{k}} \widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\\
\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}} &= \frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L \psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}.
\end{aligned}
$$

初めに (1.1) を Fourier 級数展開する. そのとき (1.1) の左辺は,

$$
\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\boldsymbol{k}} |\boldsymbol{k}|^2\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{1.2}
$$

となり, さらに上式に $\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}$ を掛けて領域積分すると,

$$
-\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\boldsymbol{k}} |\boldsymbol{k}|^2\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial}{\partial t}(L^2|\boldsymbol{l}|^2\widehat{\psi}_{\boldsymbol{l}}), \tag{1.3}
$$

となる．一方, (1.1) の右辺は,

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{u}\cdot\nabla q &= \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}\right)\times\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\left(\sum_{\boldsymbol{k}''}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}\right)\times\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\left(\sum_{\boldsymbol{k}''}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''} ik'_y ik''_x(-|\boldsymbol{k}''|^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{r}} \\
&\quad - \sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''} ik'_x ik''_y(-|\boldsymbol{k}''|^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{r}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''}(k'_y k''_x - k'_x k''_y)(|\boldsymbol{k}''|^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{r}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''}(\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{k}')_z(|\boldsymbol{k}''|^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{r}}, \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

or

$$
\sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''}(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{k}'')_z(|\boldsymbol{k}'|^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{r}}, \qquad (1.5)
$$

と二通りの表現が得られる．(1.4) と (1.5) を足して 2 で割ることで,

$$
-\boldsymbol{u}\cdot\nabla q = \sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''}\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{k}')_z(|\boldsymbol{k}''|^2-|\boldsymbol{k}'|^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{r}}, \qquad (1.6)
$$

と書ける．これに $\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}$ を掛けて領域積分すると,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''}\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{k}')_z(|\boldsymbol{k}''|^2-|\boldsymbol{k}'|^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\int\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}''-\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''}\frac{L^2}{2}(\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{k}')_z(|\boldsymbol{k}''|^2-|\boldsymbol{k}'|^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\delta_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'',\boldsymbol{l}}, \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

となる．(1.2) と (1.7) が等しいことから,

$$
\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{k}|^2\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''}\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{k}'')_z(|\boldsymbol{k}''|^2-|\boldsymbol{k}'|^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}'}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}''}\delta_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'',\boldsymbol{k}}, \qquad (1.8)
$$

が得られる．ここで $\boldsymbol{l}\to\boldsymbol{k}$ の変換を行った．上式を Fourier 変換を用いて書き換える:

$$
\frac{\partial}{\partial t}k^2\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}} = \int\mathrm{d}\boldsymbol{l}\int\mathrm{d}\boldsymbol{m}\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z(m^2-l^2)\widehat{\psi}_{\boldsymbol{l}}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{m}}\delta(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}-\boldsymbol{k}), \qquad (1.9)
$$

ここで $\boldsymbol{k}' \to \boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{k}'' \to \boldsymbol{m}$ の変換を行った. $[\{(1.9) \times \widehat{\psi}^*_{\boldsymbol{k}}\} + \{\text{c.c.}\}]/2$ (c.c. は複素共役を表す) を実行することで, $\boldsymbol{k}$ モードのエネルギー方程式,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}k^2|\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}}|^2\right) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{l} \int \mathrm{d}\boldsymbol{m} T_E(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}), \tag{1.10}$$

が得られ[*1] , ここで $T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m})$ は,

$$T_E(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m})_z(m^2 - l^2)\ \mathrm{Re}\ [\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{l}}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{m}}]\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l} + \boldsymbol{m}), \tag{1.11}$$

で表される**三波エネルギー伝達関数**である. また, $\boldsymbol{k}$ モードのエンストロフィー方程式は以下のように書ける:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}k^4|\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}}|^2\right) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{l} \int \mathrm{d}\boldsymbol{m} k^2 T_E(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}), \tag{1.12}$$

三波エネルギー伝達関数の性質

先ほど得た三波エネルギー伝達関数から以下の二通りの詳細釣り合いが導ける:

詳細釣り合い (詳細保存則)

$\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l} + \boldsymbol{m} = 0$ を満たすモードに対して,

$$T_E(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}) + T_E(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}) + T_E(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) = 0, \tag{1.13}$$

$$k^2 T_E(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}) + l^2 T_E(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}) + m^2 T_E(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) = 0, \tag{1.14}$$

が成り立つ.

((1.14) の証明) 今, $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l} + \boldsymbol{m} = 0$ より,

$$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{m} \times (-\boldsymbol{l} - \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m},$$
$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l} = (-\boldsymbol{l} - \boldsymbol{m}) \times \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m},$$

[*1] ここで, $\boldsymbol{l} \to -\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m} \to -\boldsymbol{m}$ の変換を行った.

であるから, (1.13) の左辺は,

$$
\begin{aligned}
&((1.13)\text{ の左辺}) \\
&= \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z(m^2-l^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{k})_z(k^2-m^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l})_z(l^2-k^2) \right\} \\
&\qquad \times \mathrm{Re}\,[\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{l}}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{m}}]\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z \left\{ (m^2-l^2)+(k^2-m^2)+(l^2-k^2) \right\} \times \mathrm{Re}\,[\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{l}}\widehat{\psi}_{\boldsymbol{m}}]\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる. (証明終)

1.1.2　フラックスの導入

　波数 $\boldsymbol{k}$ のエネルギー,

$$E(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2}k^2|\widehat{\psi}_{\boldsymbol{k}}|^2, \tag{1.15}$$

と Fourier 級数展開を用いることでエネルギー方程式 (1.10) は,

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{k})}{\partial t} = \sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} T_E(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}), \tag{1.16}$$

と書き換えられる. ここで上の式の右辺をまとめて,

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{k})}{\partial t} = T_E(\boldsymbol{k}), \tag{1.17}$$

と書く. ここで $T_E(\boldsymbol{k})$ は**エネルギー伝達関数**と呼ばれ, 非線形項によって生じる項である. つまり, この式から非線形相互作用により様々な波数間でエネルギーやエンストロフィーをやり取りした結果として $\boldsymbol{k}$ でのエネルギーが増減することがわかる. 次に, 波数空間においては統計量が等方的であることを仮定する. この仮定より, 波数空間において中心から $\boldsymbol{k} \sim \boldsymbol{k}+\mathrm{d}\boldsymbol{k}$ の範囲にある $E(\boldsymbol{k})$ を全て足す ($E(\boldsymbol{k})$ を shell に関して足す). よって (1.15) は,

$$E(k) = \sum_{|\boldsymbol{k}|=k}^{k+\mathrm{d}k} E(\boldsymbol{k}), \tag{1.18}$$

となり, このとき (1.17) は,

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = T_E(k), \tag{1.19}$$

と書ける. この場合にも詳細保存則が成り立つことに注意する:

$$T_E(k,l,m)+T_E(l,m,k)+T_E(m,k,l)=0, \tag{1.20}$$
$$k^2T_E(k,l,m)+l^2T_E(l,m,k)+m^2T_E(m,k,l)=0. \tag{1.21}$$

今, 単位時間当たりのエネルギーフラックス (以下, 単にエネルギーフラックス) $\Pi_E(k)$ を導入する．ここで低波数から高波数への向きを正とする．つまり, 例えば $\Pi_E(k)-\Pi_E(k+\Delta k)>0$ のとき $k\sim k+\Delta k$ のエネルギー $(E(k)\Delta k)$ が増加する．Taylor 展開すると,

$$\Pi_E(k)-\Pi_E(k+\Delta k)=\Pi_E(k)-\left\{\Pi_E(k)+\frac{\partial\Pi_E(k)}{\partial k}\Delta k+\mathcal{O}((\Delta k)^2)\right\}=\frac{\partial}{\partial t}\left(E(k)\Delta k\right),$$

であり, ここで $\Delta k\to 0$ の極限をとると,

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t}=-\frac{\partial\Pi_E(k)}{\partial k}, \tag{1.22}$$

が得られ, この式と (1.17) より, 伝達関数とエネルギーフラックスの関係,

$$T_E(k)=-\frac{\partial\Pi_E(k)}{\partial k}, \tag{1.23}$$

が得られる．