1.5 層浅水方程式系

ここでは Showman and Polvani (2010) で用いられる 1.5 層浅水方程式系について述べる.

2 次元球面における 1.5 層浅水方程式系はベクトル形式で以下のように書ける:

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} + g\nabla h + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{u}}{\tau_{\mathrm{drag}}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{u}h) = S - \frac{h}{\tau_{\mathrm{rad}}} \equiv Q. \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ は水平速度, h は層の厚さ, t は時間, $f(= 2\Omega\sin\phi)$ はコリオリパラメータを表す. また S は質量強制, Q は熱強制, τ_{drag} は摩擦時定数, τ_{rad} は放射時定数を表す. また,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \tag{3}$$

である.

方程式 (1) 中の $\boldsymbol{R}$ 項は以下の形式をとる:

$$\boldsymbol{R}(\lambda,\phi,t) = \begin{cases} -\dfrac{Q\boldsymbol{u}}{h}, & Q > 0; \\ 0, & Q < 0. \end{cases} \tag{4}$$

ここで λ と ϕ はそれぞれ経度と緯度を表す. この項は惑星の運動量の汲み上げを表す (Shell and Held, 2004).

また質量強制 S は以下の形式をとる:

$$S = \frac{H}{\tau_{\mathrm{rad}}} + S_0\cos(m\lambda)\exp\left[-\left(\frac{\phi-\phi_0}{\Delta\phi}\right)^2\right]. \tag{5}$$

ここで H は流体層の平均厚さ, S_0 は強制振幅, m は東西波数, ϕ_0 は中心緯度, $\Delta\phi$ は緯度方向の半値幅を表す.

無次元化

ここでは支配方程式系 (1)–(5) の無次元化を行う. 定常状態 ($\partial/\partial t = 0$) を考えると, 東西方向および南北方向の運動量方程式と質量保存の式はスカラー形式で以

下のように書ける:

$$\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial u}{\partial\phi}-\frac{uv\tan\phi}{a}+\frac{g}{a\cos\phi}\frac{\partial h}{\partial\lambda}-2\Omega\sin\phi\ v=R_u-\frac{u}{\tau_{\mathrm{drag}}}, \tag{6}$$

$$\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial v}{\partial\phi}+\frac{u^2\tan\phi}{a}+\frac{g}{a}\frac{\partial h}{\partial\phi}+2\Omega\sin\phi\ u=R_v-\frac{v}{\tau_{\mathrm{drag}}}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial(hu)}{\partial\lambda}+\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(hv\cos\phi)=Q \tag{8}$$

ここで各変数を代表的な大きさ U, V, H を用いて, (6)–(8) を無次元化する:

$$u=U\widehat{u},\quad v=V\widehat{v},\quad h=H\widehat{h}. \tag{9}$$

(9) を (6)–(8) に代入すると, 以下の無次元化された支配方程式系が得られる:

$$\begin{aligned}&Ro_u^2\frac{\widehat{u}}{\cos\phi}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\lambda}+Ro_uRo_v\widehat{v}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\phi}-Ro_uRo_v\widehat{u}\widehat{v}\tan\phi+Ro^2\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\widehat{h}}{\partial\lambda}-2Ro_v\sin\phi\ \widehat{v}\\&=-Ro_u\left\{\frac{1-\widehat{h}}{\epsilon_{\mathrm{rad}}}+\frac{\chi}{\gamma}f(\lambda,\phi)\right\}\frac{\widehat{u}}{\widehat{h}}-\frac{Ro_u}{\epsilon_{\mathrm{drag}}}\widehat{u}\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&Ro_uRo_v\frac{\widehat{u}}{\cos\phi}\frac{\partial\widehat{v}}{\partial\lambda}+Ro_v^2\widehat{v}\frac{\partial\widehat{v}}{\partial\phi}-Ro_u^2\widehat{u}\widehat{v}\tan\phi+Ro^2\frac{\partial\widehat{h}}{\partial\lambda}+2Ro_u\sin\phi\ \widehat{u}\\&=-Ro_v\left\{\frac{1-\widehat{h}}{\epsilon_{\mathrm{rad}}}+\frac{\chi}{\gamma}f(\lambda,\phi)\right\}\frac{\widehat{v}}{\widehat{h}}-\frac{Ro_v}{\epsilon_{\mathrm{drag}}}\widehat{v}\end{aligned} \tag{11}$$

$$Ro_u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\widehat{h}\widehat{u})}{\partial\lambda}+Ro_v\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\widehat{h}\widehat{v}\cos\phi)=\frac{1-\widehat{h}}{\epsilon_{\mathrm{rad}}}+\frac{\chi}{\gamma}f(\lambda,\phi) \tag{12}$$

ここで無次元数は以下の通り定義する:

- 惑星ロスビー数: $Ro\equiv\dfrac{\sqrt{gH}}{a\Omega}$
- 東西および南北流速を代表的流速としたロスビー数: $Ro_u\equiv\dfrac{U}{a\Omega}$ および $Ro_v\equiv\dfrac{V}{a\Omega}$
- 惑星半径に対する代表的厚さの比: $\gamma=\dfrac{H}{a}$
- 自転速度に対する強制振幅の比: $\chi\equiv\dfrac{S_0}{a\Omega}$
- 自転周期に対するニュートン冷却の時定数の比: $\epsilon_{\mathrm{rad}}\equiv\Omega\tau_{\mathrm{rad}}$
- 自転周期に対するレイリー摩擦の時定数の比: $\epsilon_{\mathrm{drag}}\equiv\Omega\tau_{\mathrm{drag}}$

ポテンシャル渦度保存則

(1) において右辺がゼロであると仮定し, ベクトル不変形式で書き換えると,

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} + (\zeta + f)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} = -\nabla\left(gh + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right),$$

である. これの回転をとると,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)(\zeta + f) = -(\zeta + f)\nabla\cdot\boldsymbol{u},$$

または,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\zeta + f) = -(\zeta + f)\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{13}$$

が得られる. 一方, 質量保存の式 (2) は,

$$\frac{\zeta}{h}\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} = -\zeta\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{Q\zeta}{h} \tag{14}$$

と書き換えられる.

浅水系におけるポテンシャル渦度は $(\zeta + f)/h$ であることを知っていれば, (13) と (14) を用いると,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\zeta + f}{h}\right) &= \frac{1}{h}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\zeta + f) + (\zeta + f)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{h}\right) \\
&= \frac{1}{h}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\zeta + f) - \frac{\zeta + f}{h^2}\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} \\
&= \frac{1}{h}\left\{-(\zeta + f)\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right\} - \frac{\zeta + f}{h^2}\frac{h}{\zeta}\left(-\zeta\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{Q\zeta}{h}\right) \\
&= -\frac{\zeta + f}{h^2}Q,
\end{aligned}$$

である. 但し $Q = 0$ である場合, ポテンシャル渦度保存則,

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\zeta + f}{h}\right) = 0,} \tag{15}$$

が成り立つ.

角運動量保存則

東西方向の運動方程式はスカラー形式で以下のように書ける:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{uv\tan\phi}{a} + \frac{g}{a\cos\phi}\frac{\partial h}{\partial \lambda} - fv = R_u - \frac{u}{\tau_{\mathrm{drag}}}. \tag{16}$$

この式を用いて角運動量 $m \equiv (u + \Omega a \cos\phi) a \cos\phi = m_r + m_p$ に対する式を導く. (16) に $a\cos\phi$ を掛けると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(ua\cos\phi) + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}(ua\cos\phi) + v\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} - uv\sin\phi \\ + g\frac{\partial h}{\partial \lambda} - fva\cos\phi = R_u a\cos\phi - \frac{ua\cos\phi}{\tau_{\mathrm{drag}}}, \end{aligned} \tag{17}$$

となる. 上式の左辺第三項と第四項は,

$$v\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} - uv\sin\phi = \frac{v}{a}a\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{uv}{a}a\frac{\partial \cos\phi}{\partial \phi} = \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial \phi}(ua\cos\phi), \tag{18}$$

とまとめられる. また,

$$\frac{\partial m_p}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}(\Omega a^2 \cos^2\phi) = -2\Omega a^2 \cos\phi \sin\phi = -fa^2\cos\phi, \tag{19}$$

より,

$$\frac{v}{a}\frac{\partial m_p}{\partial \phi} = -fva\cos\phi, \tag{20}$$

と表される. これらを用いると, (17) は,

$$\frac{\partial m_r}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial m_r}{\partial \lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial m}{\partial \phi} + g\frac{\partial h}{\partial \lambda} = R_u a\cos\phi - \frac{m_r}{\tau_{\mathrm{drag}}}, \tag{21}$$

と書き換えられる. よって,

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t} + g\frac{\partial h}{\partial \lambda} = R_u a\cos\phi - \frac{m_r}{\tau_{\mathrm{drag}}},} \tag{22}$$

である. ここで,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial \phi}, \tag{23}$$

である.

Q の正負によらず $R_u = -Qu/h$ である場合, 式 (A.4) は,

$$\frac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t} + g\frac{\partial h}{\partial \lambda} = -\frac{Qm_r}{h} - \frac{m_r}{\tau_{\mathrm{drag}}}, \tag{24}$$

である. また, 質量保存の式 (2) は,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}(hu) + \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(hv\cos\phi) = Q, \tag{25}$$

に書き換えられる. $h \times (24) + m \times (25)$ を実行すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}(hm) + \nabla \cdot (hm\boldsymbol{u}) + \frac{g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial \lambda} = -\frac{hm_r}{\tau_{\mathrm{drag}}} + Qm_p, \tag{26}$$

もしくは,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(hm) + \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}(hmu) + \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(hmv\cos\phi) + \frac{g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial \lambda} \\ = -\frac{hm_r}{\tau_{\mathrm{drag}}} + Qm_p,\end{aligned} \tag{27}$$

が得られる.

付録 A

ここでは支配方程式系 (1)–(2) における角運動量 m と柱状積算角運動量 hm に対する時間発展方程式を導く．ここで $m=(u+\Omega a\cos\phi)a\cos\phi=m_r+m_p$ であり, m_r と m_p はそれぞれ相対角運動量と惑星角運動量である．

運動量方程式 (1) の東西成分と質量保存の式 (2) は, 球座標系を用いて,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial u}{\partial\phi}-\frac{uv\tan\phi}{a}+\frac{g}{a\cos\phi}\frac{\partial h}{\partial\lambda}-fv=R_u-\frac{u}{\tau_{\mathrm{drag}}} \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(hu)+\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(hv\cos\phi)=Q \tag{A.2}$$

である．式 (A.1) に $a\cos\phi$ を掛けると,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial m_r}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial m_r}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}a\cos\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}-uv\sin\phi+g\frac{\partial h}{\partial\lambda}-fva\cos\phi\\&=R_ua\cos\phi-\frac{m_r}{\tau_{\mathrm{drag}}}\end{aligned} \tag{A.3}$$

である．式 (A.3) の左辺第三項と第四項は,

$$\frac{v}{a}a\cos\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}-uv\sin\phi=\frac{v}{a}a\cos\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}+\frac{v}{a}u\frac{\partial(a\cos\phi)}{\partial\phi}=\frac{v}{a}\frac{\partial m_r}{\partial\phi}$$

と書き換えられる．また式 (A.3) の左辺第六項は,

$$-fva\cos\phi=-(2\Omega\sin\phi)va\cos\phi=\frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}(\Omega a^2\cos^2\phi)=\frac{v}{a}\frac{\partial m_p}{\partial\phi}$$

と書き換えられる．よって, 式 (A.3) は, $m=m_r+m_p$ を用いると,

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial m}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial m}{\partial\phi}+g\frac{\partial h}{\partial\lambda}=R_ua\cos\phi-\frac{m_r}{\tau_{\mathrm{drag}}} \tag{A.4}$$

もしくは,

$$\frac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t}+g\frac{\partial h}{\partial\lambda}=R_ua\cos\phi-\frac{m_r}{\tau_{\mathrm{drag}}} \tag{A.5}$$

である．ここで,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{A.6}$$

である．

次に hm に対する時間発展方程式を導く．$h \times$ (A.1) $+ m \times$ (A.2) より，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(hm) + \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(hmu) + \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(hmv\cos\phi) + \frac{g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial\lambda} \\
&= hR_u a\cos\phi + Qm - \frac{hm_r}{\tau_{\mathrm{drag}}}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

もしくは,

$$\frac{\partial}{\partial t}(hm) + \nabla\cdot(hm\boldsymbol{u}) + \frac{g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial\lambda} = hR_u a\cos\phi + Qm - \frac{hm_r}{\tau_{\mathrm{drag}}} \tag{A.8}$$

である．

今 Q の正負によらず $R_u = -Qu/h$ の場合を考える．このとき式 (A.8) の右辺第一項と第二項は,

$$hR_u a\cos\phi + Qm = -Qm_r + Q(m_r + m_p) = Qm_p$$

となる．したがって, このとき,

$$\frac{\partial}{\partial t}(hm) + \nabla\cdot(hm\boldsymbol{u}) + \frac{g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial\lambda} = Qm_p - \frac{hm_r}{\tau_{\mathrm{drag}}} \tag{A.9}$$

である．これを全球平均すると,

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(Qm_p - \frac{hm_r}{\tau_{\mathrm{drag}}}\right)\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\lambda \tag{A.10}$$

である．ここで全球平均絶対角運動量 M は,

$$M = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} hm\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\lambda \tag{A.11}$$

である．式 (A.10) の右辺は, $Q = S - h/\tau_{\mathrm{rad}}$ を用いると,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(Qm_p - \frac{hm_r}{\tau_{\mathrm{drag}}}\right)\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\lambda \\
&= \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Sm_p\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\lambda}_{\mathrm{I}} \underbrace{- \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{h\left(\frac{m_p}{\tau_{\mathrm{rad}}} + \frac{m_r}{\tau_{\mathrm{drag}}}\right)\right\}\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\lambda}_{\mathrm{II}}
\end{aligned}$$

と書き換えられる．項 I は $S = h_0/\tau_{\mathrm{rad}} + S_0\cos(m\lambda)\exp[-\{(\phi-\phi_0)/\Delta\phi\}^2]$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{h_0}{\tau_{\mathrm{rad}}} + S_0\cos(m\lambda)\exp\left[-\left(\frac{\phi-\phi_0}{\Delta\phi}\right)^2\right]\right\} m_p\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{h_0 m_p}{\tau_{\mathrm{rad}}}\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\lambda = \frac{2a^2\Omega h_0}{3\tau_{\mathrm{rad}}} = \mathrm{const.}
\end{aligned}$$

であるとわかる. さらに $\tau_{\mathrm{rad}} = \tau_{\mathrm{drag}}$ である場合, 項 II は,

$$
\mathrm{II} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{hm}{\tau_{\mathrm{drag}}}\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\lambda = -\frac{M}{\tau_{\mathrm{drag}}}
$$

となる. このとき, 式 (A.10) は,

$$
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\frac{M}{\tau_{\mathrm{drag}}} + \mathrm{const.} \tag{A.12}
$$

である.