潮汐固定された系外惑星における赤道上のスーパーローテーション

Adam P. Showman and Lorenzo M. Polvani

0 要旨

系外惑星の観測の増加する豊富さはこれらの惑星のたくさんの三次元 (3D) の大気循環モデルの動機づけとなっている．強い放射条件下で潮汐固定された短周期の惑星 (ホットジュピターと地球型惑星の両方) のモデルは赤道上で速く東向きの, もしくは "スーパーローテーションしている" ジェット気流によって支配される循環を示す傾向にある．放射時定数と移流時定数が同程度の場合, この現象は最も熱い領域が恒星直下点から経度 10° だけ東に変位させる．そのような偏りは HD 189733b で次いで観測されており, 短周期の系外惑星での赤道ジェットの可能性を支持する．けれどもその関連性にも関わらず, そのようなモデルにおける赤道スーパーローテーションの生成の原因となる力学的なメカニズムは確認されていない．ここで我々は, 平均流と, 昼夜間熱強制によって励起される定常ロスビー波との相互作用の結果として赤道ジェットが生じることを示す．放射加熱における経度方向の強い変化, つまり強い昼面加熱と夜面冷却, は定常で惑星スケールの赤道ロスビー波と赤道ケルビン波を引き起こす．ロスビー波は高緯度から赤道へ東向きの運動量を送る位相の傾きを発達させ, それによって赤道スーパーローテーションを励起する．我々はこのメカニズムを示す解析理論を提示し, 一層の (浅水) 計算と完全な 3D モデルの階層においてその性質を調べる．波動平均流相互作用は赤道ジェットを形成し, そのジェットの緯度方向の幅はロスビー波の幅, つまり放射と摩擦の効果によって修正された赤道ロスビー変形半径, と同程度である．同期回転するホットジュピターの典型的な条件に対してこの長さは惑星半径と同程度であり, 多くのホットジュピターモデルで得られる赤道ジェットの広いスケールを説明する．我々の理論は少しでもジェットを形成する条件はもちろん, 赤道ジェットの速度の強制振幅, 摩擦の強さ, そして他のパラメータの依存性を示す．

1 導入

短周期の系外惑星, つまりガス巨大惑星 (ホットジュピター) と小さな地球型惑星の両方, の大気大循環を理解しようと努力して, 過去数年間によって主要な前進が立証された. 現在スピッツァー宇宙望遠鏡とハッブル宇宙望遠鏡の赤外測光, スペクトル, 光度曲線はいくつかのホットジュピターの三次元温度構造への制約を与える. その構造はこれらの剛体上の活発な大気循環をほのめかす (例えば Knutson et al. 2007, 2009; Charbonneau et al. 2008; Harrington et al. 2006; Cowan et al. 2007; Swain et al. 2009; Crossfield et al. 2010). これらの観測はこれらの対象物上の大気循環をモデルするための前進的な努力を動機づける. 現在までにホットジュピターの三次元大気循環モデルが報告されている (Showman & Guillot 2002; Cooper & Showman 2005, 2006; Showman et al. 2008, 2009; Dobbs-Dixon & Lin 2008; Menou & Rauscher 2009; Rauscher & Menou 2010; Lewis et al. 2010; Perna et al. 2010; Heng et al. 2010). これらのモデルは約 2–5 日で円軌道を同期回転するホットジュピターを強調していた.

過去 10 年間にホットジュピターの最初の評価が行われたように, 次の 10 年間では “スーパーアース” (1–10 地球質量の惑星) と地球型惑星の評価へシフトするだろう. 現在までおおよそ 30 個のスーパーアースが発見されており, そのうちいくつかは host star へ移っている (Charbonneau et al. 2009; Leger et al. 2009; Batalha et al. 2011). さらに数百個が NASA のケプラーミッションから報告されている (Borucki et al. 2011). それらの大気を観測的に評価する試みはすでに始まっている (Bean et al. 2010). この先駆けを見越して潮汐固定された短周期の地球型系外惑星の三次元循環モデルがいくつか報告されている (Joshi et al. 1997; Joshi 2003; Merlis & Schneider 2010; Heng & Vogt 2010).

興味深いことに, これらの三次元モデル, ホットジュピターと地球型惑星の両方, の多くにおける流れは赤道上で高速で東向き, もしくは**スーパーローテーションする**ジェットストリームを発達させ, 西向きの流れが深いレベルおよび/または高緯度で典型的に発生している. ホットジュピターのモデルにおいてはスーパーローテーションするジェットが赤道から典型的には緯度 20°–60° まで及んでおり, もしかするとモデルされた流れの支配的な力学的特徴だろう. いくつかの場合 (課される恒星加熱と他の要因の強さに依存する) において, このジェットは恒星直下点から経度約 10°–60° だけ最も熱い領域を東へ変位させる. Showman & Guillot (2002) は最初にこの特徴を予期し, もしそれがホットジュピターに存在するならばそれは赤外スペクトルと光度曲線に対して重要な意味をもつ. この予測はスピッツァーによる HD 189733b の赤外観測において確かめられ (Knutson et al. 2007, 2009), この惑星は実際にスーパーローテーションするジェットを示す可能性がある.

けれども, 同期回転する系外惑星の三次元モデルにおける赤道スーパーローテーション (そして観測に対するその関連性) の普遍性にもかかわらず, このスーパーローテーションを生成するメカニズムはまだ確認されていない. Hide (1969) による定理の中で証明されたように, そのようなスーパーローテーションは, 経度方向に対称的な, もしくは惑星の回転軸に関して単位質量当たりの角運動量を保存する大気循環から生じることはできない. 赤道上の大気は自転軸から最も遠い領域であり, したがってスーパーローテーションする赤道ジェットが自転軸に関して単位質量当たりの角運動量における局所的な最大値と一致する. したがって高緯度もしくは深いレベルから赤道の大気へ空気を移動させるような角運動量を保存する循環は赤道上で**西向き**の流れを生成しようとする. これと等価に, コリオリ力は赤道向きもしくは鉛直上向きに移動する空気に対して常に西向きの加速を励起し, したがって高緯度もしくは深いレベルから赤道上の大気へ移動する空気に働くコリオリ力から東向きの赤道ジェットは生じることはできない. 例えば地球の赤道上の対流圏では流れは西向きであり, これは地球上 (平均転向循環とそのコリオリ加速が決定的な役割をもつレジーム; Held & Hou 1980) の対流圏のハドレーセルから生じる. 赤道スーパーローテーションを維持するためには, 単位質量当たりの角運動量をそれが**小さい**領域 (ジェットの外側) から**大きい**領域 (ジェットの内側) まで汲み上げる, つまりいわゆる勾配上向き運動量輸送するメカニズムが必要となる. Hide の定理によるとこの輸送は波や渦によってのみ達成される.

太陽系の大気のいくつかでは赤道スーパーローテーションが存在する. つまり金星, タイタン, 木星, 土星の大気はすべてスーパーローテーションしている. 地球の赤道上の成層圏の中に制限される層でもスーパーローテーションや “準二年間振動” や QBO と呼ばれる現象の一部を示す (Andrews et al. 1987). これらの惑星上の赤道スーパーローテーションを駆動するためのメカニズムは多様である. 可能性のあるメカニズムは, 傾圧不安定, 順圧不安定, 乱流そして大気の波の様々な型の吸収/放射と関連する渦輸送を含む (例えば Williams 2003a, 2003b; Lian & Showman 2008, 2010; Schneider & Liu 2009; Del Genio et al. 1993; Del Genio & Zhou 1996; Andrews et al. 1987; Mitchell & Vallis 2010).

ここでは同期回転する短周期の系外惑星の三次元モデルにおける赤道スーパーローテーションが定常の惑星規模のロスビー波の存在からどのように発生するのかを証明する. そのような波は経度方向に依存する加熱パターン, つまり昼面の加熱と夜面の冷却, によって自然と励起される. そのパターンは短周期の同期回転する惑星の光球領域を伴う. 2 節は背景理論を与える. 3 節ではメカニズムを示す解析理論を与え, 理想化された非線形の一層モデルにおけるその振る舞いを系統的に調べる. 4 節では解析を三次元モデルへ拡張する. 5 節ではまとめを行い, 意味合いを議論する.

2 背景理論

ジェットを加速させるロスビー波の働きは二次元非発散順圧渦度方程式を用いて模式的に説明される．この方程式系は惑星大気の大規模流れに対する最も簡単なモデルである (Vallis 2006; Showman et al. 2010 にある議論を見よ)．方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}(\zeta+f)}{\mathrm{d}t} = F, \tag{1}$$

である．ここで $\zeta \equiv \boldsymbol{k}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u}$ は相対渦度, $\boldsymbol{u}$ は水平速度, $\boldsymbol{k}$ は局所的な上向きの単位ベクトル, $f \equiv 2\Omega\sin\phi$ はコリオリパラメータ, Ω は惑星の自転率 (自転周期にわたって 2π), ϕ は緯度であり, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla$ は物質微分 (つまり流れを導く微分) である．方程式は項 F で表される渦度のソース/シンクを除いては個々の流体パーセルが絶対渦度 $\zeta+f$ を保存させる．方程式は等価に,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\zeta + v\beta = F, \tag{2}$$

と書くことができる．ここで v は南北方向 (北向き) の風速, $\beta = \mathrm{d}f/\mathrm{d}y$ は北向き距離 y が与えられたコリオリパラメータの勾配である．この簡単なモデルで流れが水平非発散であるから, 流線関数 ψ を $u = -\partial\psi/\partial y$, $v = \partial\psi/\partial x$ と定義することができる．ここで x は東向きの座標, u は東西方向 (東向き) の風速である．これは方程式を一つの変数 ψ の関数で書くことを許す．

説明のためにソースとシンクのない式 (2) の線形版を考えよう．この線形で非強制の方程式の解はロスビー波である．簡単化のために一定の β をもつ直交座標系, これは球面上の局所的な領域を表す, を考える．変数を東西平均 (バーで示される) とそれからのずれ (プライムで示される) に分解し, 平均流がゼロであると仮定すると, $\psi' = \widehat{\psi}\exp[i(kx+ly)]$ で与えられる解を導く．ここで i は虚数, k と l は東西波数と南北波数である．分散関係式は,

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2+l^2}, \tag{3}$$

である．これらの波は,

$$\frac{\partial\omega}{\partial l} = \frac{2\beta kl}{(k^2+l^2)^2}, \tag{4}$$

で与えられる群速度で南北方向に伝播する．

簡単な議論については Thompson (1971) によって初めて明確に提示され, Held (2000) と Vallis (2006) で再考されたが, その議論ではこれらの波がどのように東西平均流の東西加速を生成するのかが示された．単位質量あたりの渦の東向き運

動量の緯度方向の輸送は $\overline{u'v'}$ である．ここで u' と v' はそれぞれ東西風と南北風の東西平均からのずれであり, バーは東西平均を示す．波によって励起される東西風と南北風に対する解 $u' = -il\widehat{\psi}\exp[i(kx+ly)]$ と $v' = ik\widehat{\psi}\exp[i(kx+ly)]$ を用いて運動量フラックス,

$$\overline{u'v'} = -\frac{1}{2}\widehat{\psi}^2 kl, \tag{5}$$

が導かれる．群速度は波の生成領域 (“波のソース” と呼ばれる) から離れなければならず, β は正であるから, ソースの北側では $kl > 0$, ソースの南側では $kl < 0$ でなければならない．したがって, ソースの**北側**では $\overline{u'v'}$ は負であり, これは東向きの運動量の南向き輸送を示す．しかし, ソースの**南側**では $\overline{u'v'}$ は正であり, これは東向きの運動量の北向き輸送を示す．ゆえにロスビー波は東向き運動量を波の生成領域へ輸送する．したがって波の生成領域では東向き加速が生じ, 波の崩壊や散逸の領域では西向き加速が生じるにちがいない．これが東西方向 (東-西) のジェット流の形式を導く．[*1]

ロスビー波が一定のポテンシャル渦度の表面における緯度方向の振動に対応する[*2]．したがって大きなスケールでそのような振動が引き起こされるようないくつかの過程はロスビー波を励起する傾向にある．地球大気では支配的なソースのうちの一つが傾圧不安定であり, 温度の緯度方向の勾配が大きいような中緯度の対流圏でこのような不安定が生じる．対流圏の (陸と海の対比による) 加熱と冷却, もしくは地形の上の流れが空間的に変化することでもポテンシャル渦度のコンターが揺すられ, ゆえにロスビー波を引き起こす．一方で潮汐固定された熱い系外惑星の大気では昼夜の加熱パターンが優先的な力学的強制を構成する．そのような惑星に対してはこの加熱/冷却のパターンが低緯度でロスビー波を引き起こすことを予期する (図 1).

上の理論は自由波に対するものである．今, 渦度のソース/シンクによって強制され摩擦抵抗によって減衰される大気への拡張を試みる．順圧系の東西平均した東西方向の運動量方程式は,

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} - \frac{\overline{u}}{\tau_{\mathrm{drag}}}, \tag{6}$$

である．ここでバーは東西平均を示し, プライムはそれからのずれを示す．方程式は緯度方向の渦の運動量フラックスの収束と抵抗によって東西平均した東西流の

[*1][原文脚注 5] 上記の力学的描像は小さな振幅の擾乱に制限されず, それは例えば Held (2000) と Vallis (2006) で簡単な議論が示されるのと同様である．

[*2][原文脚注 6] ポテンシャル渦度は断熱で摩擦無しの成層流において保存する渦度と関連する物理量である．順圧系に対しては単に絶対渦度 $\zeta + f$ であり, 浅水系に対しては層厚にわたる絶対渦度は $(\zeta + f)/h$ であり, そして三次元の成層大気に対しては $\rho^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla\theta$ で与えられる．ρ は密度, $\boldsymbol{\Omega}$ は惑星の回転ベクトル, そして θ は温位である．力学においてポテンシャル渦度の保存とその使い方に関する議論に対しては Pedlosky (1987) や Vallis (2006) を見よ．

加速が生じることを示しており, ここでは抵抗を, 摩擦時定数 τ_{drag} にわたって東西平均した東西風をゼロに向かって緩和する項としてパラメータ化している．式 (6) 中の渦の加速と渦度のソース/シンクの間の関係は二段階から成る．初めに渦度の定義が $\overline{v'\zeta'} = -\partial(\overline{u'v'})/\partial y$ であることを示唆する．次に式 (2) の線形版に ζ' を掛けて東西平均する．これによっていわゆる擬運動量の収支に対する方程式が導かれる (Vallis 2006, p. 493):

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \overline{v'\zeta'} = \frac{\overline{\zeta' F'}}{2\left(\beta - \dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}\right)}. \tag{7}$$

二次元の非発散モデルに対しては $\mathcal{A} = (\beta - \partial^2\overline{u}/\partial y^2)^{-1}\overline{\zeta'^2}/2$ が擬運動量であり, 波の活動度の指標である．式 (6) と (7) を足し合わせ, 波の振幅と東西平均した東西風が統計的に定常, つまり $\partial\mathcal{A}/\partial t \approx 0$ と $\partial\overline{u}/\partial t \approx 0$, であることを仮定すると,

$$\frac{\overline{u}}{\tau_{\mathrm{drag}}} = \frac{\overline{\zeta' F'}}{2\left(\beta - \dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}\right)}, \tag{8}$$

を得る．この式は渦度のソース/シンクと, 東西平均した東西風 $\overline{u}$ に対する摩擦を関係づけている．平均における相対渦度の渦のソース/シンクが渦度そのものと同じ符号をとる (つまり $\overline{\zeta' F'} > 0$) とき, 渦の加速は東向きであり, 定常状態では東向きの東西平均した東西風の結果となる．相対渦度のソース/シンクが渦度と反対の符号をもつ傾向にある ($\overline{\zeta' F'} < 0$) とき, 渦の加速は西向きであり, 定常状態では西向きの東西平均した東西風の結果となる．[*3] 自由解と似ているが, この振る舞いはロスビー波の生成, 緯度方向の伝播, 散逸を用いて典型的に解釈される．

このメカニズムは地球の中緯度での渦駆動のジェット流の原因であると考えられる (そして東向きの表面風と関係づけられる)．つまり, 傾圧不安定が中緯度から射出されるロスビー波を生成し, そこで東向きの渦の加速を生じさせ, 定常状態で東向きの表面風を導く (Held 2000; Vallis 2006)．赤道では地球の対流圏はスーパーローテーションしていない．にもかかわらず, 理想化された地球の大循環モデル (GCMs) は熱帯で東西方向に変化する強い加熱と冷却があると赤道上のスーパーローテーションを生じさせることを示している (Suarez & Duffy 1992; Saravanan 1993; Kraucunas & Hartmann 2005; Norton 2006)．上で示した議論と似ているが, Held (1999) はこれらのモデルにおけるスーパーローテーションが熱帯の加熱源によるロスビー波の生成と極方向への伝播の結果として生じているということを発見的に提示した．

[*3][原文脚注 7] これらの議論では $\beta - \partial^2\overline{u}/\partial y^2 > 0$ であることを仮定しており, これは一般的なケースである．

依然として順圧モデルを潮汐固定された系外惑星に適用することは問題がある. 同期回転していて離心率ゼロのホットジュピターにおける大気の循環のモデルの多くは相対的に定常な循環パターンを示しており, その速度と温度のパターンは赤道に関して近似的に対称的である (Showman & Guillot 2002; Cooper & Showman 2005, 2006; Showman et al. 2008, 2009; Dobbs-Dixon & Lin 2008; Rauscher & Menou 2010). そのようなモデルでは相対渦度が赤道に関してほとんど非対称的であり, 赤道ではゼロである. 式 (8) はこのシミュレーションに対して赤道上で $\overline{u} = 0$ であることを予期する. したがって, 魅力的ではあるが, これらのホットジュピターモデルではこの理論は赤道上のスーパーローテーションを説明できない.

他にも難点がある. 一つは, ここで提示された理論は流れが順圧的, つまり流れが式 (1) で説明される, ことを仮定しており, それによって波の性質を形作る際に有限ロスビー波の役割を無視している. 二つに, 鉛直運動は通常, 加熱と冷却の領域を伴い, これらの鉛直運動はゼロでない水平発散を導く. したがって低緯度の流れは加熱/冷却があるために本質的に発散的であり, 述べられた仮定と反している. さらに熱強制によるロスビー波の生成に対するおおざっぱな方法では理論が立たない. 上の方程式は熱力学を含んでおらず, 相対渦度を生成するような強制の効果のみが表されている. 赤道から離れると, 加熱が鉛直運動と高く水平発散を生成し, その発散がコリオリ力の作用による高気圧的な相対渦度を生成することを予期する. けれども赤道ではこの渦度ソースは小さく, 赤道での東向き流れを生成する際にこの順圧理論の適用能力を不明瞭なままにする. [*4] 地衡流的な過程が緩和されて有限変形半径が含められるとき, 自由に伝播する赤道波の解析解は, そのような波が赤道波管内に補足される傾向にあり, 赤道から離れて伝播することができないことを示す (Holton 2004; Andrews et al. 1987). そのような波の解は南北方向の正味の運動量輸送を含んでおらず, したがって有限の変形半径があるために上のメカニズムが赤道上で実現可能かどうかという疑問が生じる. 最後にホットジュピターに対してはロスビー波が全球スケールであることが予期されており, 赤道域から極方向へそれらが伝播する空間があるかどうかは先見的に明らかではない.

我々は以下の節でこれらの障害を克服した一連のモデルを提示し, 潮汐固定された系外惑星における赤道上のスーパーローテーションを理解するための理論的な基礎を与える.

[*4][原文脚注 8]

3 赤道上のスーパーローテーションの浅水モデル

完全な GCM の解は有用ではあるが, 多くの相互作用過程を含むためにそのような解から特定の力学メカニズムをきれいに確認することはしばしば難しい (例えば Showman et al. 2010 を見よ). ゆえに簡単化されたモデルは大気力学において重要な役割を果たしている. ここで我々は最も簡単に考えられる状況におけるメカニズムをとらえるために非常に理想化されたモデルを提示する.

我々は二層モデルを採用し, このモデルは各層で一定の密度をもち, 上層は気象学的に活動的な大気を表し, 下層は静止した深い大気と内部領域を表す. 下層が無限に深くなり下層の風と圧力勾配が時間に関して定常なままであるような極限において, この二層系は上層における流れに対する浅水方程式系に縮小される (例えば Vallis 2006, p. 129-130):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + g\nabla h + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{u}}{\tau_{\mathrm{drag}}}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{u}h) = \frac{h_{eq}(\lambda,\phi) - h}{\tau_{\mathrm{rad}}} \equiv Q. \tag{10}$$

ここで $\boldsymbol{u}(\lambda,\phi,t)$ は水平速度, $h(\lambda,\phi,t)$ は上層の厚さ, t は時間, g は (低減) 重力[*9], $f = 2\Omega\sin\phi$ はコリオリパラメータ, ϕ は緯度である. 再び $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla$ は物質微分である. 層の境界は大気の等エントロピー面であり, 加熱や冷却があるために質量が交換されるところを横切る. したがって加熱と冷却は浅水系では質量のソースとシンクを用いて表され, ここでは放射時定数 τ_{rad} にわたって特定の放射平衡高度 h_{eq} (昼面では厚く夜面では薄い) に向かって高度のニュートン緩和として表される. 運動量方程式 (9) は時定数 τ_{drag} をもつ摩擦を含み, これは MHD 摩擦 (Perna et al. 2010), 鉛直乱流混合 (例えば Li & Goodman 2010), そして重力波が崩れることによる運動量輸送 (Lindzen 1981; Watkins & Cho 2010) の潜在的に重要な効果を表す.

式 (9) 中の項 $\boldsymbol{R}$ は下層からの運動量移流の上層に対する効果を表し, Shell & Held (2004) と Showman & Polvani (2010) と同じ形式をとる:

$$\boldsymbol{R}(\lambda,\phi,t) = \begin{cases} -\frac{Q\boldsymbol{u}}{h}, & Q > 0; \\ 0, & Q < 0. \end{cases} \tag{11}$$

ここで λ と ϕ は経度と緯度である. 上層の外へ移動する空気 ($Q < 0$) は上層の特定の角運動量や風速には局所的に影響を与えず, よってその場合 $\boldsymbol{R} = 0$ である.

[*9][原文脚注 9] 式 (9) 中の g は層の間の密度差の分数が掛けられた実際の重力であり, ゆえに "低減重力" と呼ばれる. 三次元大気の文脈でこの浅水モデルを解釈すると, この密度差は (例えば) スケールハイトを横切る温位の分数変化として解釈されるべきである. これはホットジュピターに対してはオーダー 1 である.

しかし上層へ運ばれてくる空気は下層の運動量を輸送し, したがって上層における局所的な特定の角運動量と東西風を変化させる．下層の風がゼロと仮定されるような最も簡単な場合ではこの過程が上層の柱状積算 $\boldsymbol{u}h$ を保存させ, $Q > 0$ に対する式 (11) 中の表現を導く．重要なことだが $\boldsymbol{R}$ に対する表現は運動量収支から直接的に導かれ, 自由パラメータを含まない．[*10]

運動量方程式の右辺にある二つの項の相対的な役割は, 運動量方程式を以下のように書き直すことで明らかとなる:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + g\nabla h + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\left[\frac{1}{\tau_{\mathrm{drag}}} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{rad}}}\left(\frac{h_{eq}-h}{h}\right)\mathcal{H}(h_{eq}-h)\right]. \tag{12}$$

ここで $\mathcal{H}(h_{eq}-h)$ はヘヴィサイドの階段関数であり, $h_{eq}-h>0$ のとき 1 であり, それ以外では 0 と定義される．力学的には右辺の項が両方とも摩擦と似た役割をもつことは明らかである．実効的摩擦時定数にわたって効くような角括弧内の全体的な量で定義される．依然として二番目の項 ($\boldsymbol{R}$) は空間に関して不均一であり, 加熱領域にのみ存在し, そして我々はそれが東西平均流に与える効果が一番目の項 (摩擦抵抗) のものとは定性的に異なることを示す．強く照らされるホットジュピターに対しては $(h_{eq}-h)/h \sim 0.01$-1 と予期しており, もしそうならばそのとき $\tau_{\mathrm{drag}} \ll \tau_{\mathrm{rad}}$ なら一番目の項が支配的であり, $\tau_{\mathrm{drag}} \gg \tau_{\mathrm{rad}}$ なら二番目の項が支配的である．

次の二つの小節では方程式系 (9)-(11) の線形の解析解と, 完全に非線形の数値解を提示する．

3.1 線形解

解析解を得るためにコリオリパラメータが $f=\beta y$ で近似されると仮定する直交座標系における方程式系 (9)-(11) を解く．ここで y は赤道から北向きの距離, β (コリオリパラメータの北向きの距離の勾配) は一定と仮定される．この近似は “赤道 β 面” と呼ばれ, 低緯度でのみ厳密に妥当であるが, 3.2 節でこれらの解の定性的な特徴が球座標系における完全な解で取り戻されることがわかる．

[*10][原文脚注 10] 上層の外へ移動する空気が上層の特定の運動量を変化させないという条件は, そのような運動量移流が非加速を生じさせることを必要とし, $Q<0$ に対して $\boldsymbol{R}=0$ であることを示唆する．$Q>0$ の場合に対する表現を導くために $\boldsymbol{u}$ が掛けられた質量保存の式と h が掛けられた運動量方程式を足し合わせ, したがって $\boldsymbol{u}h$ の時間変化率に対する方程式を導く．加熱/冷却を含む項は $h\boldsymbol{R}+\boldsymbol{u}Q$ である．下層の風がゼロである特別な場合では上層への質量輸送が上層の柱状積算水平風速 $\boldsymbol{u}h$ を変えない．これは $h\boldsymbol{R}+\boldsymbol{u}Q=0$ であることを示唆し, したがって式 (11) が導かれる．

今, 方程式系 (9)-(11) を静止状態の周りで線形化する. 定義によれば線形化された方程式系における全ての項が強制振幅でスケールされる大きさをもつ. 項 $\boldsymbol{R}$ は速度と強制振幅の積を含み, よって強制振幅の二次の量であり, 線形化された方程式系に現れないことに注意せよ. (東西平均した東西風に対する解の意味を評価する際にそれに戻る.) 線形化された方程式系は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} - \beta y v = -\frac{u}{\tau_{\rm drag}}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} + \beta y u = -\frac{v}{\tau_{\rm drag}}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = S(x,y) - \frac{\eta}{\tau_{\rm rad}}, \tag{15}$$

である. ここで x は東向きの距離, η は厚さのその一定の参照値 H からのずれであり, $h = H + \eta$ である. 物理量 $S \equiv (h_{eq} - H)/\tau_{\rm rad}$ は強制であり, $S \equiv \eta_{eq}/\tau_{\rm rad}$ とも表現される. ここで $\eta_{eq} \equiv h_{eq} - H$ は H からの放射平衡高度のずれである.

これらの方程式系の自由解 (つまり右辺がゼロのときの解) はよく知られた赤道上で補足される波のモードであり, 例えば Holton (2004) と Andrew et al. (1987) で示される. けれども, 熱く潮汐固定された系外惑星で受ける強い加熱と冷却が与えられると, 強制解を見つける. ホットジュピターの 3D 力学モデルの多くは相対的に定常的な循環パターンを示し (Showman & Guillot 2002, Cooper & Showman 2005, 2006, Dobbs-Dixon & Lin 2008, Dobbs-Dixon et al. 2010, Showman et al. 2008, 2009, Rauscher & Menou 2010), よって強制と散逸がある場合の定常解を見つける.

方程式系 (13)-(15) を長さスケール $L = (\sqrt{gH}/\beta)^{1/2}$, 速度スケール $U = \sqrt{gH}$, 時間スケール $\mathcal{T} = (\sqrt{gH}\beta)^{-1/2}$ で無次元化する. これらのスケールはそれぞれ赤道ロスビー変形半径, 重力波速度, 浅水系において重力波が変形半径を横切るための時間に対応する. 厚さは H, 摩擦と熱的な時定数は $\mathcal{T}$, 強制は $H/\mathcal{T}$ でそれぞれスケールされる. 定常流れに対して, 以下に従う:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - yv = -\frac{u}{\tau_{\rm drag}}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} + yu = -\frac{v}{\tau_{\rm drag}}, \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = S(x,y) - \frac{\eta}{\tau_{\rm rad}}. \tag{18}$$

ここですべての物理量は $\tau_{\rm rad}$ と $\tau_{\rm drag}$ を含み, 今無次元である.

先駆的な研究では Matsuno (1966) と Gill (1980) は特別な場合に対して方程式系 (16)-(18) に対する解析解を得た. そこでは摩擦時定数と放射時定数が等しく,

南北方向の運動量方程式 (17) から摩擦を無視する. 後者の仮定は "長波近似" と呼ばれる. なぜなら東西方向の長さスケールが南北方向のものよりも非常に大きい場合に対してこの近似は妥当であるからである. けれども潮汐固定された系外惑星では摩擦時定数と放射時定数が大きく異なり, 長波近似は適用できない. なぜなら流れは東西スケールと南北スケールが同等であることを示すからである. よって我々は方程式系 (16)-(18) の完全な形式を保持する.

方程式系 (16)-(18) は結合され, 南北速度 v に関する一本の微分方程式に従う (例えば Wu et al. 2001):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_{\mathrm{drag}}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{\tau_{\mathrm{rad}}}\left(y^2+\frac{1}{\tau_{\mathrm{drag}}^2}\right)v \\ =\left(-y\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{drag}}}\frac{\partial S}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{19}$$

もし分離解を見つけるならば, そのとき Gill (1980) と Wu et al. (2001) で示されるように有限の τ_{drag} をもつこの式に対する解の南北構造は放物柱関数 $\psi_n(y)$ であり, 単にガウシアンが掛かったエルミート多項式である[*11]：

$$\psi_n(y)=\exp\left(-\frac{y^2}{2\mathcal{P}^2}\right)H_n\left(\frac{y}{\mathcal{P}}\right). \tag{20}$$

ここで $\mathcal{P}\equiv(\tau_{\mathrm{rad}}/\tau_{\mathrm{drag}})^{1/4}$ はプラントル数の四乗根である.

我々の目的は熱強制 $S(x,y)$ を特定し, 未知の u, v, η に対して解くことである. 一般的に熱強制の理想のパターンは,

$$S(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)\psi_n(y), \tag{21}$$

で表現される. 潮汐固定された系外惑星に対してこのパターンが加熱と冷却の昼夜間変化から成ることを予期する. 加熱と冷却の振幅が低緯度でピークをもち極付近で消える. 我々は強制を赤道に関して対称 (赤道系射角ゼロの惑星に対して適切) であるとし, 数学を取り扱い可能なままにするために, 単に項 S_0 を, ガウシアンである加熱と冷却のパターンに対応して, 赤道中心にし, 摩擦と放射の効果によって修正された赤道ロスビー変形半径の半分の緯度幅を持たせる. 完全な解は全ての $n\geq 0$ に対する S_n を考慮することを必要とするが, 典型的なホットジュピターにおける場合と同様に, 変形半径が惑星半径と似ている場合に対しては一番目の項 S_0 が支配的な項であろう. よってこの項を単独で考慮することは, 潮汐固定され

[*11] [原文脚注 11] 低次のエルミート多項式は $H_0(\xi)=1$, $H_1(\xi)=2\xi$, $H_2(\xi)=4\xi^2-2$, $H_3(\xi)=8\xi^3-12\xi$ である.

た系外惑星における赤道スーパーローテーションするジェットを励起するために関連のある定性的な特徴を示すためには十分である.

付録 B は方程式系 (16)-(18) の解法を示し, 強制が経度方向に正弦関数的に変化する項 S_0 だけから成る, つまり $S(x,y) = \widehat{S}_0\, e^{ikx}\psi_0(y)$, という特定の場合に対する解を提示する. ここで $\widehat{S}_0$ は定数である. 図 2 はホットジュピターもしくはホットスーパーアースの典型的なパラメータ値に対する例 (惑星円周の昼夜間加熱コントラストに関連する東西方向の波長とオーダー 10^5 s の放射時定数) を示す. この例に対しては摩擦時定数が放射時定数と等しくとられている. 図 2 (a) は放射平衡高度を示し, 図 2 (b) は定常状態の高度場と速度場を示す.

解はいくつかの重要な特徴を示す. 放射平衡高度は恒星直下点に関して経度方向に対称 (図 2 (a)) であるけれども実際の高度場は放射平衡高度から随分とずれており, かなりの力学的な構造を示す (図 2 (b)). ふるまいに関して二つの基本的な型がある. 一つに, 中緯度から高緯度にかけて (図で $|y| \sim$ 1-3) 流れは渦的なふるまいを示す. 昼面は各半球で高気圧を含み, 北半球で風が時計回りに流れており南半球で風が反時計回りに流れているところの辺りでは圧力が高い (つまり高度の局所的な最大値) ことを意味している. 夜面は各半球で低気圧を含み, 北半球で風が反時計回りに流れており南半球で風が時計回りに流れているところの辺りで圧力が低いことを意味する. 二つに, 低緯度で ($|y| \leq 1$)) 流れはほとんど東西方向である. その流れは恒星直下経度の東にある点 (図 2 (b) にバツ印で示される) から発散しており, 非恒星直下経度の東の点に向かって収束している.

Gill (1980) で議論されたようにこれらの特徴は強制散逸の定常赤道波モードと解釈される. 上で示した中緯度から高緯度にかかる特徴は力学的には, $n = 1$ の赤道に補足されたロスビー波のものと類似しており, これらは低気圧と高気圧を示し, 経度方向に交代し, 赤道から離れている (このモードにおける流れ場の例として Matsuno 1966, 図 4 (c) を見よ). 上で議論された低緯度の特徴は力学的には $n = 1$ のロスビー波と赤道ケルビン波の重ね合わせと類似している. これは基本的な赤道に補足された波のモードであり, 強い東西風を伴うが非常に弱い南北風を伴い, それらの振幅は赤道に関して対称であり, 赤道上でピークをとる (例えば Holton 2004 や Andrews et al. 1987 を見よ). これらの波のモードは両方とも赤道で主に東西方向の風を示す. 図 2 に示される例では, 赤道ではケルビン波の成分が $n = 1$ のロスビー波の成分よりも支配的である[*12] .

方程式系 (16)-(18) は, これが二つのパラメータ, つまり放射時定数と摩擦時定数, によって支配される問題であることを示す. 今, どのようにふるまいがこれらのパラメータに依存するのかを試験する. 図 3 は, 付録 B で示されるように, 無次

[*12] どうしてこう言い切れるのか.

元の放射時定数 1, 10, 100 (それぞれ上段, 中段, 下段) と摩擦時定数 1, 10, 100 (それぞれ左, 真ん中, 右) に対する線形解を示す. ホットジュピターに適切なパラメータ (自転周期 3 地球日, $gH \approx 4 \times 10^6$ m^2 s^{-2}) に対して, これらの無次元の値はそれぞれ有次元の時定数 3×10^4, 3×10^5, 3×10^6 s に対応する (付録 A を見よ). 放射時定数と摩擦時定数が短いとき (図 3 の左上), 最大最小の熱 (高度) 擾乱は赤道に位置しており, 恒星直下点と反恒星直下点に近い. この極限において高度場は放射平衡に近く (図 3 の左上を図 2 (a) と比較せよ), [*13] 明確なロスビー波の旋回流は現れない. 放射時定数と摩擦時定数が中間の値をもつとき, 低気圧と高気圧が見えるようになり, 図 2 (b) にあるように, 放射平衡にある極値の西側に位相が移動した高度の極値を示す. 同様に, 赤道に沿った高度の極値は放射平衡と相対的に東側に位相がずれるようになる. 赤道に沿った厚さの変化は中緯度におけるものと相対的に小さくなる. 放射時定数と摩擦時定数が長いとき (図 3 の右下), 高度場は赤道から離れた低気圧と高気圧によって支配的となり, 赤道で最小の変化をもつ. 極限 $\tau_{\rm rad} \to \infty$ と $\tau_{\rm drag} \to \infty$ では解が赤道で平坦になり, 経度方向には $x = 0$ の軸に関して対称である (付録 C で明確に示される点). 図 3 は $\tau_{\rm rad}$ と $\tau_{\rm drag}$ が 100 である場合に対してさえも, この極限がほとんど達せられる.

赤道に補足されるロスビーモードとケルビンモードの東西方向の伝播を用いることで図 3 にあるふるまいのほとんどが理解される. 長波の赤道に補足されるロスビー波は西向きの群伝播を示すが, ケルビン波は東向きの群伝播を示す. $\tau_{\rm rad}$ と $\tau_{\rm drag}$ が非常に短いとき (図 3 の左上), 波が東西方向に伝播できないくらいに減衰が強い. 結果として高度は放射平衡高度場に近い. 二つの時定数が中間値をもつとき, 図 2 (b) と図 3 の真ん中で見られるように厳密に, 伝播は赤道で高度場の位相の東向き移動を生成し (ケルビン成分), 赤道から低気圧と高気圧では高度場の位相の西向き移動を生成する (ロスビー成分). 二つの時定数が非常に長くなるとき, 赤道から離れた低気圧と高気圧の西向きの位相のオフセットが最大値 90° に達する. けれども赤道での高度変化はゼロに近づく. このことは, 赤道でコリオリ力がゼロであるという事実によって説明され, よって線形化された力のバランスは圧力勾配力と摩擦の間にある. 弱い摩擦は弱い圧力勾配力を必要とし, よって赤道では平坦な層を必要とする.

今, 本論文のキーポイントはこれらの線形解が潮汐固定された系外惑星上の赤道スーパーローテーションの発達に対して主要な意味をもつということである. 図 2 (b) と図 3 に見られるように, 風のベクトルは北半球では北西から南東へ, 南半球では南西から北東へ全体に傾いている. このパターンは赤道を中心として東を向いているシェブロンと似ており, 放射時定数と摩擦時定数が短いときに特に強いが, 示される全ての場合で生じている. この構造は, 平均的に見て, 極方向へ移動する空気は平均よりも遅い東向きの風速をもっているのに対して赤道に移動する空気

[*13] [原文脚注 12]

は平均よりも速い東向きの風速をもつことを示唆し, よって北半球では $\overline{u'v'} < 0$, 南半球では $\overline{u'v'} > 0$ である. 図 1 に模式的に示されるように, このことは正確には赤道へ東向きの渦の運動量フラックスを生じさせるパターンの型であり, 赤道上のスーパーローテーションを生じさせる. 運動量は中緯度から取り除かれているためそこでは西向きの東西平均流を予期する.

これらの位相の傾きを生成する原因となる物理的なメカニズムは二通りある. 一つに, 上で議論された異なる波の伝播である. それはつまりこの伝播はケルビン波において高度場の位相を放射平衡高度と相対的に東向きに移動させ, ロスビー波において高度場を西向きに移動させる. ロスビー波はケルビン波の極側の側面にあることから, 結果は高度のコンターが北半球では北西から南東に傾き, 南半球では南西から北東に傾くようなシェブロンのパターンである. 速度ベクトルが近似的にジオポテンシャルのコンターと平行である (摩擦が弱いか中間のときそれらは赤道から離れる傾向にある) 程度では, これは北半球では $\overline{u'v'} < 0$, 南半球では $\overline{u'v'} > 0$ となる速度の傾きを形成するだろう.

赤道でのスーパーローテーションに対して必要となる速度の傾きを形成するための二番目のメカニズムは単にコリオリ力, 摩擦そして圧力勾配力の三つによる力のバランスである. 摩擦は速度と反対向きに働き, コリオリ力は速度に垂直であるから, この三つの力のバランスは, 北半球で速度が $-\nabla\eta$ の時計回り, 南半球で速度が $-\nabla\eta$ の反時計回りであることを必要とする. 予期される η における昼夜間勾配が与えられると, このバランスは北半球で速度が北西から南東に傾き南半球では南西から北東に傾く傾向にあることを示唆する. 我々は付録 D で $\tau_{\rm rad} \to 0$ における極限での解析解を用いてこの事実を証明する. 高度場がほとんど放射平衡にあり, よって全体として位相の傾きを示さないときでさえも, 速度そのものは北半球で $\overline{u'v'} < 0$, 南半球で $\overline{u'v'} > 0$ の傾きを発達させる (図 15 を見よ). 極限 $\tau_{\rm rad} \to 0$ における計算は特に興味深い. なぜならこの極限ではケルビン波とロスビー波の東西方向の伝播がないからである. 放射抵抗は無限に強く, (放射平衡と相対的に) 高度場の位相の移動はゼロである. これは図 3 の左上における速度の傾きに対する支配的なメカニズムである.

これらの定常波のパターンからどのようにスーパーローテーションが生じているのかを明確に示すために, これらの線形解と関連する東西加速を解析する. 変数をそれらの東西平均 (バーで示す) とそれからのずれ (プライムで示す) に分解し,

東西方向の運動量方程式 (式 (9)) を東西平均すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} =& \underbrace{\bar{v}^* \left[f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]}_{\mathrm{I}} \underbrace{- \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial}{\partial y} [\overline{(hv)'u'}]}_{\mathrm{II}} \\
&+ \underbrace{\left[\frac{1}{\bar{h}} \overline{u'Q'} + \overline{R_u}^* \right]}_{\mathrm{III}} \underbrace{- \frac{\bar{u}^*}{\tau_{\mathrm{drag}}}}_{\mathrm{IV}} - \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial (\overline{h'u'})}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

が導かれる (例えば Thuburn & Lagneau 1999). ここで a は惑星半径, $\overline{A}^* \equiv \overline{hA}/\overline{h}$ は任意の物理量 A を厚さで重み付け東西平均したものを示す. 式 (22) は変形オイラー平均した運動量方程式の浅水版であり, プリミティブ方程式の等エントロピー座標系の形式のものと似ている (Andrews et al. 1987 の 3.9 節を見よ). 右辺では, 項 I, II そして III はそれぞれ (1) 平均子午面循環による運動量移流 (2) 東西方向の渦の運動量の南北フラックスの収束 (3) 渦の東西流の領域と質量のソース領域の間の相関 (本質的には鉛直方向の渦の運動量輸送) による加速を表す. この項の範囲内では物理量 R_u は $\boldsymbol{R}$ の東西成分 ($Q > 0$ のとき $-QU/h$, $Q < 0$ のとき 0 と等しい) である. 項 IV は摩擦抵抗である. 最後の項は渦の運動量の時間変化率を表す. 線形の極限において式 (22) の右辺にある項すべてが消えゆく小さな振幅をもっており, この場合では図 2 と 3 にある解は真の定常状態を示す. けれども任意の有限振幅で項 I-IV はゼロではなく, 東西平均した東西流の生成を引き起こすだろう.

図 2 (c) は図 2 (b) に示される具体例の解に対するこれらの項を図示する. 予期されることだが, 渦の運動量の水平収束, つまり項 II は赤道上で強い東向き加速と中緯度での西向き加速を生じさせる (黒線). 一方, 鉛直方向の渦の運動量輸送に関連する加速, つまり項 III は赤道上で強く西向き (青色) であり, 赤道上で渦の運動量の下向き輸送を示す. 残りの項, つまり平均子午面循環 (項 I, シアン) と質量で重み付けした摩擦 (項 IV, 黄緑) は赤道上で小さい. 二つの渦の項は赤道上で部分的にキャンセルされるが, 水平方向の渦の運動量の収束による加速は鉛直方向の渦の運動量収束によるものよりも大きく, 赤道上で正味の東向き加速と中緯度で西向き加速を導く (赤色).

τ_{rad} と τ_{drag} が変化されるとき (図 3) に生じる形態学の幅広い範囲にも関わらず, すべての解は渦の運動量の赤道向きフラックスと赤道上で正味東向きの加速を示す. このことは図 4 に示され, それは図 3 に示される各ケースに対する式 (22) からの二つの渦の加速項を示す. よってこれらの解は制御パラメータの本質的に任意の値で赤道上でスーパーローテーションと中緯度で西向きの平均流が生じることを示す.

空間速度と質量のソース/シンクのパターンは鉛直方向の渦の交換によって引き

起こされる西向きの赤道加速の物理的な起源を示す. 解は, 赤道上で東西風速ゼロの経度は質量のソースの極値の東にある (図 2 (b)). この特徴は Matsuno (1966, 図 9) と Gill (1980, 図 1) の定常の線形計算でも明らかに目に見える. この移動のため, 西向き (東向き) の渦の平均流の領域において赤道上の質量のソース (シンク) が支配的に生じる. よって平均的に見れば質量のシンク領域は東向きの柱状積算した渦の運動量をもつ空気を層の外へ輸送する. 質量のソース領域は静止した深部の層から上層へ相対的にゼロの東西方向の運動量を輸送する. この過程は上層の局所的な柱状積算した相対運動量 $\boldsymbol{u}h$ を保存させる. したがって東西平均したとき, 赤道上での鉛直方向の交換は層から運動量を取り除き, $(\overline{u'Q'} + \overline{R_u}^*) < 0$ を導き, 西向き加速に寄与する (図 2 (c) の青線).

けれども, 上記の議論は支配的ではなく, 二つの渦の項 (式 (22) の II と III) が支配的である. [*14] これが大きいこと, つまり正味の赤道加速が東向きか西向きかどうかを決定するために, 以下の形式で東西平均した東西方向の運動量方程式を書く:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \overline{v'\zeta'} + \bar{v}(f + \bar{\zeta}) - \frac{\bar{u}}{\tau_{\rm drag}} + \bar{R}_u. \tag{23}$$

ここで ζ は相対渦度である. 強制が赤道に関して対称である場合に対して, 解の u と h は赤道に関して対称であるが, v と ζ は非対称である. 結果として南北速度と相対渦度が赤道上でゼロであり, よって項 $\overline{v}(f+\zeta)$ と $\overline{v'\zeta'}$ はそこで消える. したがって,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\bar{u}}{\tau_{\rm drag}} + \overline{R_u} \quad {\rm at} y = 0 \tag{24}$$

である, 本質的なことだが, 赤道上では $\overline{R_u}$ は渦の運動量の水平フラックスと鉛直フラックスによって起こる加速の間の不釣り合いである. $\overline{u} = 0$ と仮定した解析解は, $Q > 0$ の領域で u が主に東向きであることを示し, よって $\overline{R_u} > 0$ であることを示唆する. よって式 (24) から渦によって励起された正味の加速は東向きである. 一般的な方法ではこのことが図 4 における赤道上の正味の渦加速の符号を説明する. もちろん, 一度東西平均流 ($\overline{u} \neq 0$) が発達すると, $\overline{R_u}$ の大きさは変化し, 摩擦項が式 (24) で重要となる. 結果的にこれらの項がバランスし, 定常状態が達せられることを許す. 我々は 3.2 節でこの式から見て可能な定常状態を議論する.

我々は循環の**空間パターン**を非常に強調してきたが, 線形解によって予期される速度の**大きさ**を試験することも興味深い. 放射平衡高度において昼夜間の差が平均値と同等で, 放射時定数が数日かそれ以下 (ホットジュピター上で強く強制される状況に大して予期されることだが) のとき, 図 2 (b) と 3 はオーダー 1 の無次元速度に達する. ホットジュピターに対しては典型的な $g = 20\ {\rm m\ s^{-2}}$ と $H = 200$ km を用いると, これは有次元の速度で $\sim 2\ {\rm km\ s^{-1}}$ である. 数分の一の範囲内で, これ

[*14] は?

は完全に非線形なホットジュピターの 3D 大気循環モデルに得られる速度と似ている (Showman & Guillot 2002; Cooper & Showman 2005; Showman et al. 2008, 2009; Dobbs-Dixon & Lin 2008; Dobbs-Dixon et al. 2010; Menou & Rauscher 2009; Rauscher & Menou 2010; Thrastarson & Cho 2010). 赤色矮星のハビタブルゾーンの中の潮汐固定された地球のような惑星で $g = 10$ m s^{-2}, $H = 10$ km で地球のような放射時定数 ~ 10 日を用いると, そのとき解は無次元速度 ~ 0.02-0.1 を示す. これは数十 m s^{-1} の有次元速度に対応し, 潮汐固定された地球型惑星のモデルで得られる速度と似ている (Joshi et al. 1997; Heng & Vogt 2010; Merlis & Schneider 2010).

3.2 非線形解

次に小さな振幅と直交座標系を緩和して非線形性と完全な球面幾何学が解にどのように影響を与えるのかを示し, 波に励起された加速がどのように平均流と相互作用し赤道上のスーパーローテーションを示す平衡状態を形成するのかを示す. それを実行するために全球幾何における方程式系 (9)-(11) の完全に非線形の形式を解く. このとき,

$$h_{eq} = H + \Delta h_{eq} \cos\lambda \cos\phi, \tag{25}$$

で与えられる放射平衡厚さを用いる. ここで H は平均厚さ, Δh_{eq} は放射平衡厚さにおける昼夜の対比であり, 恒星直下点は経度 0° 緯度 0° である. 惑星は同期回転していると仮定されており, よって $h_{eq}(\lambda, \phi)$ は時間に関して一定のままである. 我々は定性的に似た解をスーパーアースへ適用することを予期するけれども, 具体性のためホットジュピターに適切な惑星パラメータを採用する. 20 m s^{-2} の典型的な重力と 200 km のスケールハイトがホットジュピターに適切であるために $gH = 4 \times 10^6$ m^2 s^{-2} であることを予期し, すべての計算にこの値を採用する. (g と H は独立に特定される必要はないことに注意せよ.) また $\Omega = 3.2 \times 10^{-5}$ s^{-1} と $a = 8.2 \times 10^7$ m とし, これらはそれぞれ自転周期と, 2.3 地球日の惑星半径と 1.15 木星半径に対応し, HD 189733b に対する値と似ている.

方程式系が, 静止した無限に深い下層の上に横たわる活動的な層をもつ二層系を示すことを繰り返す. 層の間での結合 (特に加熱/冷却がある場合の質量交換) によって, 上層において摩擦が全体的に除外される極限 ($\tau_{\rm drag} \to \infty$) を含むような摩擦時定数の任意の値に対して解がすぐに定常状態に達する. これは実際, 地球を含む太陽系の大気の多くの完全な三次元 GCM における解の簡単な表現である. また, 地球はしばしば地表面付近では強い強い摩擦抵抗と上層では皆無かそれに近い摩擦をもち, すべての層モデルを通じていまだに定常の構造に簡単に達することはない. 我々の場合では, 摩擦が強いとき, 実行時間 $\leq 10\tau_{\rm drag}$ において解が定常状態

に達することがわかる. 摩擦がなくなる場合, 定常状態に達する時間は層の間の運動量とエネルギーの交換の大きさによって (例えば $\boldsymbol{R}$ の項の大きさによって) 決まり, 一般的に $\leq 10\tau_{\rm rad}|H/\Delta h|$ である. ここで $|\Delta h|/H$ は活動的な層における小さな高度変化の特徴的な値である. ここで示されるすべての解は平衡で定常である.

我々は Hack & Jakob (1992) の STSWM を用いて方程式系 (9)-(11) を解く. u と v に対する方程式系を調べるよりもむしろコードは渦度発散型の運動量方程式を解く. 初期条件は静止したジオポテンシャル gH の平らな層であり, 方程式系は切断波数 T170 を用いて積分される. これは経度と緯度で 0.7° の解像度に対応する (つまり経度と緯度で 512×256 の全球格子である). 数値的な安定性を維持するために ∇^6 の超粘性がそれぞれの力学変数に適用される. コードは leapfrog 時間離散化スキームを採用し各時間ステップにおいて Asselin フィルターを適用し計算モードを抑える. これらの方法は標準的な実践であり, より詳細には読者は Hack & Jacob (1992) を参照されたい.

3.1 節にある解析理論との比較を促進するために, 始めに振る舞いが線形的な非常にゆっくりとした振幅における解を示す. 図 5 は放射時定数と摩擦時定数が等しくそれぞれ 0.1, 1, 10 (地球) 日に対するジオポテンシャル (つまり gh) を示す. 定性的には球面幾何学における数値解は β 面上の解析解との類似点を生む. ほんの一日の時定数において赤道上にジオポテンシャルの最大値が生じ, 0.1 日の時定数 (パネル (a)) に対してはジオポテンシャルが放射平衡解と似ており, 風が恒星直下点からその反対点へ流れている. より長い時定数 (1 日, パネル (b)) はケルビン波とロスビー波の東西方向のエネルギー伝播を許し, 赤道上ではジオポテンシャルの東向きの位相移動と高緯度 ($\sim$ 40°-90°) では西向きの位相移動を導く. 結果としてジオポテンシャルのコンターが北半球では北西から南東への傾きを発達させ, 南半球では南西から北東への傾きを発達させる. 時定数が長い (10 日, パネル (c)) とき, 赤道から離れると低気圧と高気圧がジオポテンシャルを支配し, 赤道に沿って弱いジオポテンシャル変化のみがある. これらの渦は楕円形であり, 赤道に近い領域は位相の傾き (東向き赤道向きに対する西向き極向き) を発達させるけれども, 全体的な位相の傾きを示さない. 運動量フラックスはこれらすべての場合に対して赤道上で順行の渦加速 (とスーパーローテーション) を生じさせる. これらの特徴のすべては解析解 (図 3) とも共有されている.

今, 放射時定数と摩擦時定数が異なるときに解がどのように変化するのかを調べる. 線形の極限において, 摩擦時定数が放射時定数を大きく超えるとき, 順行の位相の傾き (つまり北半球での北西から南東への傾きと南半球での南西から北東への傾き) を示す領域の緯度方向の幅は赤道に向かって縮小する. これが図 6 に示されており, $\tau_{\rm rad} = 1$ 日で $\tau_{\rm drag}/\tau_{\rm rad} = 1$ (上段), 10 (中段), ∞ (下段) に対する平衡 (定常状態) 解を示す. 時定数が等しいとき, 北半球 (南半球) 全体は北西から南

東へ (南西から北東へ) の位相の傾きを示す．$\tau_{\mathrm{drag}}/\tau_{\mathrm{rad}} = 10$ のとき, これらの位相の傾きは赤道から緯度 20° までの範囲内に制限され, $\tau_{\mathrm{ddrag}} \to \infty$ に対しては幅がゼロへ収束する．この振る舞いは 3.1 節での解析理論によって説明される．式 (20) に示されるように, 緯度方向の構造を成す放物柱関数が特徴的な緯度方向の幅 $(L(\tau_{\mathrm{rad}}/\tau_{\mathrm{drag}})^{1/4}$ を示す．ここで $L = (\sqrt{gH}/\beta)^{1/2}$ は赤道ロスビー変形半径であり, したがってこれらの関数は $\tau_{\mathrm{drag}}/\tau_{\mathrm{rad}}$ が無限大となると赤道に向かって減衰する．[*13] この領域の極側では解が反対向きの位相の傾き (北半球では北東から南西への傾きと南半球では南東から北西への傾き) を示す．付録 C はこの位相の傾きの反転に対する説明を与える．小さな振幅つまり $\tau_{\mathrm{drag}}/\tau_{\mathrm{rad}} \gg 1$ での完全に球面の数値解が摩擦が無い場合の解析解と非常に似ており, 付録 C に示される (図 6 (c) と 14 を比較せよ).

非線形性が図 7 に示されるようにいくつかの重要な方法で解を変化させ, $\tau_{\mathrm{rad}} = 0.1$ 日で $\tau_{\mathrm{drag}} = 10$ 日で上段から下段にかけてそれぞれ振幅 $\Delta h_{eq}/H$ が 0.01, 0.1, 0.5 の場合に対する一連の解を示す．このような時定数の選択は強い放射強制と弱い摩擦をもつ体制の代表値であり, 典型的なホットジュピターに対して適切である．強制振幅を増加させる (つまり τ_{rad} と τ_{drag} は固定させたまま $\Delta h_{eq}/H$ を増加させる) ともちろん風速と昼夜間のジオポテンシャルの変化が増加させられる．図 7 にあるパラメータに対して赤道上の東西方向に平均した東西風速は, 図に示されるように最も小さな振幅では約 10 m s^{-1}, 最も大きな振幅では約 1000 m s^{-1} の範囲にある．さらに $\Delta h_{eq}/H$ の臨界値 (放射時定数と摩擦時定数に依存する) を超えると解は線形解から定性的に離れ始める.

初めに非線形性はより大きなジオポテンシャル変化が赤道上に生じることを許し, よっていくつかのケースで極端な強制振幅において赤道に沿ってジオポテンシャルの極値が生じうる[*14]．線形の極限において定常状態における赤道上の東西方向の力のバランスは圧力傾度力と摩擦の間にある (式 (13) を見よ)．よって摩擦が弱いとき圧力傾度力は同様に弱くならなければならず, これは赤道に沿ってジオポテンシャルの最小変化が生じることを示す．この制限は高緯度では適用されず (高緯度ではコリオリ力と圧力傾度力がバランスする), よって非常に弱い摩擦があるために一般的に赤道から離れたところで厚さの極値が生じる (図 3 の右下図, 図 5 (b) と (c), 図 6, 図 7 (a))．けれども大きな強制振幅では運動量移流項 $\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{R}$ の項が重要となり, これらが圧力傾度力とバランスし, 重大な東西圧力傾度力,

[*13]数値解は $\boldsymbol{R}$ の項があるために τ_{drag} が無限大のときに順行の位相の傾きの領域が正確にゼロとはならないことを示す．式 (12) に示されるように $\boldsymbol{R}$ は摩擦と似た役割を果たし, 実効的な摩擦時定数 (式 (12) 中の角括弧における量にわたるもの) は特徴的な大きさ $\tau_{\mathrm{drag}} h/(h_{eq} - h)$ をもつ．これが示すことは, 摩擦がないと順行の位相の傾きをもつ領域はオーダー $L[(h_{eq} - h)/h]^{1/4}$ の緯度方向の幅を示すということである．これは振幅ゼロの極限ではゼロに近づくが, 任意の有限振幅においてはゼロでない.

[*14][メモ] when they otherwise would not とは何を指しているのか.

よって厚さの重大な変化, が赤道に沿って生じることを許す. 図 7 にあるパラメータに対しては強制振幅が非常に大きい (下図) とき赤道上に厚さの変化のピークがある.

次に, 低い振幅では (図 7 (a) にあるように) 位相の傾きが反対向きにあるときでさえも, 高い振幅では図 7 (b) と (c) にあるように北 (南) 半球の大部分を通じて風とジオポテンシャルの位相の傾きが北西から南東 (南西から北東) に傾く傾向にある. この効果は運動量方程式にある $\boldsymbol{R}$ 項に直接的に帰する. 式 (12) にあるように $\boldsymbol{R}$ は摩擦と似た役割がある. 真の摩擦が弱いか無いとき, 実効的な摩擦時定数 (式 (12) 中の角括弧における量にわたるもの) は特徴的な大きさ $\tau_{\rm rad}h/(h_{eq}-h)$ をもつ. 大きな振幅 $h/(h_{eq}-h)\sim 1$ ではその場合, 実効的な摩擦時定数が $\tau_{\rm rad}$ に匹敵する. 線形解は放射時定数と摩擦時定数が比較できるとき順行の位相の傾きが全球の大部分にわたって支配的であることを示し, しかし摩擦時定数が放射時定数より大きく超えているとき位相の傾きが反対向きである (図 6 を見よ). 図 7 では, $\tau_{\rm drag}/\tau_{\rm rad}=100$ であるが上段から下段にかけて放射時定数に対する実効的な摩擦時定数の割合が減少し, 下段では ~ 1 に達し, 図 7 (a) から (c) まで位相の傾きにおける移動を説明する. これらの位相の傾きを伴う運動量フラックスを通じて, 非線形性が増加すると赤道ジェットが幅広くなりより支配的になる.

赤道ジェットにおける運動量バランスが二つの方法で定常状態を達成する. 定常状態では式 (24) は,

$$\frac{\overline{u}}{\tau_{\rm drag}}=\overline{R_u}\qquad (赤道上), \tag{26}$$

となる. 前に説明されたように東西平均した東西風が弱いとき, 東西風 u が $Q>0$ の領域では主に西向きであり, よって $\overline{R_u}>0$ (3.1 節と図 4) である. これは赤道上での東西平均した東西風の東向きの渦の加速を示し, 赤道上のスーパーローテーションを励起する. 定常状態の最初の型では強い摩擦 (短い摩擦時定数) の領域に対応して, このスーパーローテーションは摩擦 $(-\overline{u}/\tau_{\rm drag})$ による西向きの強い加速を示す. 東西平均した赤道ジェットが赤道上で摩擦が渦による東向きの加速とバランスするくらい十分強くなる. 我々はこれを “高プラントル数” 体制と呼ぶ. 我々が “低プラントル数” レジームと呼ぶような定常状態の二番目の型では運動量バランスにおいて $-\overline{u}/\tau_{\rm drag}$ が重要でないくらい摩擦が非常に弱い. 東向きの渦加速のために東西平均した東西風が高速度となる. 一度そうなると東西平均した東西風が $\overline{R_u}$ の性質を変化させ, つまり $\overline{u}$ が大きくなると, $\overline{R_u}>0$ に対する必要性のように $Q>0$ の領域で $u<0$ の範囲が小さくなる. 明らかなことだが非常に大きな $\overline{u}$ に対して, 物理量 $\overline{R_u}$ は赤道上でゼロへ近づく. したがって赤道ジェットが定常状態を達成する.

図 8 はこれらのレジームのそれぞれの例を示し, どのように運動量バランスが

生じるのかを示す．左列は強い摩擦 ($\tau_{\rm rad} = \tau_{\rm drag} = 1$ 日) をもつ例を示し, 右列は弱い摩擦 ($\tau_{\rm rad} = 0.1$ 日, $\tau_{\rm drag} = \infty$) をもつ例を示す．両方とも平衡であり定常である．これらは高振幅のケースであり, よって厚さ (上段 (a) と (e)) は大きく断片的な変化を示し, 前の議論で説明されたように (図 7), 位相の傾きは全体として北 (南) 半球では北西から南東 (南西から北東) へのトレンドを示す．これらの傾きは中緯度から赤道への渦運動量の輸送を示す．結果として東西平均した東西風は赤道上で東向きであり, 中緯度で西向きである (b と f)．けれども興味深いことに赤道ジェットと中緯度ジェットの相対的な強さが異なり, 可能な変化の範囲 (?) を示す．パネル (c) と (g) は以下の東西平均した運動量方程式, つまり式 (22) の単なる球面で等価なもの, の項を示す:

$$hogehoge \tag{27}$$

予想されるように渦の運動量の水平方向の収束を表す項 II (黒線) は赤道で強い東向き加速を生じさせ, 中緯度で西向き加速を生じさせる．鉛直方向の渦の運動量輸送を表す項 III (暗い青線) は, 水平方向の渦の運動量収束による東向き加速に反作用するように赤道上で西向き加速を生じさせる．摩擦が強い場合 (図 8 (c)), 打ち消しは不完全であり, 赤道で正味東向きの渦による加速を導く．これは 3.1 節で線形の解析論によって予測されたものである (図 2 (c) と比較せよ)．それゆえスーパーローテーションする赤道ジェットが生じ, 赤道でジェットにおける東西平均した摩擦 $-\overline{u}^*/\tau_{\rm drag}$ が東向き加速とバランスするくらいにジェットが十分に強くなるときにのみ定常状態に達する．一方で摩擦がないとき, 渦フラックスによって励起されたスーパーローテーションは非常に強くなる (図 8 (f))．これは流れが渦フラックスを変化させ, 水平方向と鉛直方向の運動量フラックスによる赤道での加速が打ち消されるような平衡状態へ自ら調節され, 定常状態で赤道で正味で渦によるスーパーローテーションを生じさせない (図 8 (g))．[*15]

解が線形的にふるまうような任意の小さな振幅でさえも, すべての強制振幅で赤道でのスーパーローテーションが生じることがわかる．このことが図 9 に描かれており, これは $\tau_{\rm rad}$ と $\tau_{\rm drag}$ の結合の範囲をもつ解に対する平衡状態における赤道上の東西平均した東西風と強制振幅を示す．それゆえここで示される赤道上のスーパーローテーションを生成するメカニズムが固有の閾値をもたないと結論づけられる．にもかかわらず, 浅水モデルに含まれないような他の過程は, 特に昼夜間強制が弱いとき, いくつかの場合で昼夜間強制を凌駕しスーパーローテーションを引き起こす．例えば Suarez & Duffy (1992) と Saravanan (1993) で試験されたケースでこのことが生じる．ここで強制振幅が閾値を超えたためにスーパーローテーションが発達しただけである．彼らのケースでは熱帯波の強制が, 中緯度の渦が熱帯に伝播することで与えられる西向きトルクに勝る十分に大きな強制を保持する

[*15] あれ, でも加速してるよね (図 8 (f)).

とき, 熱帯波の強制がスーパーローテーションを引き起こすだけである. これらの問題については 5 節で議論される.

図 9 に示される $\tau_{\rm drag}$ が有限であるような場合すべてにおいて, 強制振幅が十分に小さいとき, 赤道スーパーローテーションの東西平均速度は強制振幅の自乗でスケールされる. 実際, このことは上で述べた高プラントル領域における低緯度のふるまいであると予期される. 低緯度では解が線形的になり, 速度, 高度擾乱, 質量のソースとシンクは強制振幅でスケールされる. 低緯度で $\overline{R_u}$ は質量のソースとシンクと速度の積でスケールされるから, よってそれは強制振幅の二次の量である. 摩擦領域では式 (26) は赤道上の $\overline{u}$ が単に $\tau_{\rm rad}\overline{R_u}$ であることを示唆し, よって $\overline{u}$ そのものは強制振幅の二次の量である. 図 9 に示されるように, 解が十分に高振幅となるとき, この振る舞いは崩れる. 低プラントル数の領域はより複雑で, パラメータに依存する振る舞いのスケーリングの多様性を導く.

浅水モデルにおける流れは 3D モデルにおけるものとは一つの大きな意味で異なる. ホットジュピターの 3D モデルの多くで, 東西平均においてだけでなく, **全ての経度**で少なくとも圧力のある範囲を超えたところでは東向きの赤道流れが生じる. それに対して, ここで示される浅水モデルはすべて赤道上で東向きの**東西平均**流を示すけれども, 赤道における東西風は経度のある範囲を超えて常に西向きである. このことは以下のように導かれる: $\overline{R_u}$ は, 水平方向の渦運動量輸送と鉛直方向の渦運動量輸送の間の赤道上の東西加速において本質的にミスマッチであり, 定常状態において $\overline{u} > 0$ のときゼロより大きいかゼロと等しいだろう. R_u の定義から, これはある経度での西向きの赤道流れを示唆する. 気象力学的に活動的な大気はここでは深い内部領域の上にある一つの層だけで解像されるから, 恐らくこの特徴が生じる. 将来の研究で, 静止した内部領域の上にある二つかそれ以上の層にある流れを表現するモデルを調べ, それらがすべての経度で東向きの流れを発達させるかどうかを調べる.