

Matsuno-Gill モデルと赤道の高速風

Adam P. Showman and Lorenzo M. Polvani

0 要旨

経度方向に変化する加熱を伴う強制を受ける時, 全球大循環モデル (GCMs) で赤道上のスーパーローテーションが生成される. この強制は, Matsuno-Gill モデルで仮定されたものと同様である. しかしながら赤道上のスーパーローテーションに対する古典的な Matsuno-Gill 理論の関係は現在に至るまで提示されていない. ここでは, 古典的な浅水系の Matsuno-Gill 解は赤道上のスーパーローテーションを示さないことを示す. つまり, 流れは高緯度から極へ運動量を東向きに収束させる (つまりスーパーローテーションを促進する) がそれらもまた赤道において西向きの運動量の人為的なソースを含む. そのとき西向きの運動量のソースは緯度方向の運動量収束を消去し, スーパーローテーションが生じることを妨げる. この人為的な運動量のソースは, モデル中での鉛直方向の運動量輸送の物理的に不整合な表現の結果として生じる. もし下にある静止した層との運動量の交換を適切に説明するように Matsuno-Gill モデルを修正すると, 任意の強制振幅において解は性質上, 赤道上のスーパーローテーションを示す.^{*1}

1 序論

東西方向に変化する熱帯の加熱に対する対流圏の応答に関する理想化されたモデルは, ウォーカー循環, モンスーン循環, 熱帯温帯テレコネクション, そして熱帯力学の他の側面へ重要な理解を与える. これらの中で最も簡単でよく知られているものは放射緩和と線形 (レイリー) 摩擦によって弱められるような単層の浅水系モデルである. その解析解は, Matsuno (1966) と Gill (1980) によって開拓され, 熱

^{*1}引用: Showman, A. P., and L. M. Polvani (2010), The Matsuno-Gill model and equatorial superrotation, *GeoPhys. Res. Lett.*, 37, L18811, doi: 10.1029/2010GL044343.

帯力学において標準的な問題となった。課される加熱は赤道付近で対称的である場合、応答は、定常なケルビン波とロスビー波として解釈される。これらの波はそれぞれ、加熱領域の東へ西へ広がって減衰する。

Matsuno-Gill モデルにおいて仮定される型の東西方向に変化する定常な熱源が理想化された全球大循環モデル (GCMs) で用いられる時、赤道上のスーパーローテーション、つまり単位質量当たりの角運動量の局所的な最大値に対応する赤道上の西向きの流れ、が上部対流圏において生じる (*Suarez and Duffy (1992)*, *Saravanan (1993)*, *Kraucunas and Hartmann (2005)*, *Norton (2006)*, *Biello et al (2007)*)。摩擦過程に対してそのようなジェットを維持するためには波や渦による勾配上向きの運動量輸送が必要である。*Hedd (1999)* はこれらの単純化された GCMs における赤道上のスーパーローテーションは、課される熱帯加熱によって強制されたロスビー波が極方向への発散することと、高緯度でロスビー波が消散もしくは破綻することの結果として生じることを示唆した。熱帯波の強制は現在の気候において支配的ではない (*Lee (1999)*) が、もし熱帯波の強制がより大きくなれば、もしかすると過去の気候や未来の気候に関連して、スーパーローテーションが生じるだろう (*Tziperman and Farrell (2009)*, *Caballero and Huber (2010)*)。

理想化された Matsuno-Gill モデルとこれらの GCMs の結果、つまり東西方向に変化する熱帯加熱の場合とロスビー波の応答が存在する場合の両方、の直接的な関係にもかかわらず、古典的な Matsuno-Gill モデルと南北方向の運動量フラックスとの関係はこれまで文献の中で確かめられていないようである。控えめな狙いは、赤道上のスーパーローテーションに対する Matsuno-Gill 解の意味を明らかにすることによって標準的な Matsuno-Gill モデルと GCM の結果の間のずれを埋めることである。初めに、Matsuno-Gill 型の強制が与えられた伝統的な単層の浅水系モデルでは赤道上のスーパーローテーションが生じないことを示す。その理由を診断し、スーパーローテーションの欠落は鉛直方向の運動量輸送の不整合な表現と関係する人為的な東向きのトルクから生じることを示す。次に、下の静止した層との運動量の交換を適切に捉えるために元の Matsuno-Gill 方程式を修正すると、スーパーローテーションが生じることを実証する。これは単層系における Matsuno-Gill 型の強制に関する最初の実証であり、モデルの単純さは高速回転する流れを存在させるメカニズムに新しい理解を与える。

2 モデルと手法

1.5 層の浅水系モデルを採用する。これは上部対流圏を表す活動的な層と下部対流圏を表す深部の静止した下層から成る。これらの層の境界は中部対流圏の等エ

ントロピー線を表し、加熱と冷却があるために、そこを横切って質量が交換される。これは以下の系を導く：

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + g\nabla h + f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u}}{\tau_{\text{drag}}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}h) = S - \frac{h}{\tau_{\text{rad}}} \equiv Q. \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{u} は水平速度、 h は層の厚さ、そして他の表記は標準的なものである。連続の式 (2) は質量のソースとシンク S によって強制され、時定数 τ_{rad} の「放射」緩和によって弱められる。具体的には質量のソースとシンクがそれぞれ中部対流圏の加熱領域と冷却領域を表す。運動量方程式 (1) は時定数 τ_{drag} で与えられる抵抗を含む。ここで、この抵抗は積雲対流によって運動量輸送の潜在的に重要な効果を表す (*Lin et al (2008)*) .

方程式 (1) 中の \mathbf{R} 項は運動量移流のもつ下層から上層への効果を表し、*Shell and Held (2004)* のそれと同じ形式をとる*2：

$$\mathbf{R}(\lambda, \phi, t) = \begin{cases} -\frac{Q\mathbf{u}}{h}, & Q > 0; \\ 0, & Q < 0. \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 λ と ϕ はそれぞれ経度と緯度である。上層の外へ移動する ($Q < 0$) 空気は局所的に上層の特定の角運動量や風速に効くわけではない。ゆえにその場合 $\mathbf{R} = 0$ となる。しかし上層へ輸送される空気はそれに伴い、下層の運動量運び、したがって上層で局所的な特有の角運動量と東西風を変える。下層の風がゼロであると仮定されるような簡単な場合において、この過程は上層の柱状積分された $\mathbf{u}h$ を保存し、 $Q > 0$ に対する式 (3) の表現を導く。重要なことに \mathbf{R} に対する表現は運動量収支から直接的に導かれ、自由 (未知) パラメータを含まない (?) .

Suarez and Duffy (1992) と *Saravanan (1993)* による GCM の研究の場合と同様、経度方向には正弦型、緯度方向にはガウス型の波をもつ熱帯強制 S を課す：

$$S = \frac{h_0}{\tau_{\text{rad}}} + S_0 \cos(m\lambda) \exp \left[-\left(\frac{\phi - \phi_0}{\Delta\phi} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

ここで、 h_0 は層の参照厚さ、 S_0 は強制の振幅、 $m = 2$ は東西波数、そして $\Delta\phi = 20^\circ$ は加熱の緯度方向の半値幅である。*Suarez and Duffy (1992)* と *Saravanan (1993)* の場合と同様に多くの実験で $\phi_0 = 0$ と設定する。よって、課される加熱は赤道付近で対称的である。GCM による研究は、熱帯加熱変化に加えて、中緯度において南北方向の温度勾配と傾圧的な渦を生成するような緯度に依存する強制を含む。こ

*2付録を参照。

ここではこれらの渦に関する任意の表現をせずに孤立系におけるスーパーローテーション (もしくはそれらの欠落) のメカニズムを調べる。

Hack and Jakob (1992) の Spectral Transform Shallow Water Model (STSWM) を用いて, 球面幾何学における方程式系 (1)-(3) の完全に非線形で全球的な時間に依存する形式を解く. 経度方向と緯度方向に 0.7° の解像度に相当する三角切断波数 T170 を用いて静止した状態から計算を実行する. ∇^6 の超粘性を用いることで数値的な安定性を維持する. 適度な振幅までは平衡解は安定である. きわどい強制振幅を越えたところに不安定, つまり Gill のような強制が与えられる浅水系の研究 (*Hsu and Plumb* (2000)) からこれまでに言及されている現象がある. この現象は, 将来的な研究には価値があるが, 今回の実験結果の質的な性質に影響しない. 本論文で占める解はすべて平衡であり安定である.

3 実験結果

完全な方程式系 (1)-(2) を解く前に方程式 (1) から \mathbf{R} の項を落とすと, そのとき系が, 多くの著者によって試行されてきた (*Matsuno* (1966), *Gill* (1980), *Neelin* (1988), *Bretherton and Sobel* (2003)) 標準的な Matsuno-Gill 問題の系と同じになることを言及する. \mathbf{R} の項を無視することは少なくとも大きな振幅においては非物理的であると言えよう. なぜならこのような条件下では, 層の間で質量交換があるので (両方の層にわたって積分された) 領域当たりの局所的な運動量が保存しないからである. そのような質量交換によって運動量の誤ったソースとシンクを作る. しかしながら, 標準的な Matsuno-Gill 公式は熱帯力学における基本的なモデルであるから初めにその解から考えていく.

$\mathbf{R} = 0$ であるとき方程式系 (1)-(2) の解は赤道上のスーパーローテーションを示さないことがわかる. 図 1 (上段) は一例を示す. ジオポテンシャル場と風速場は (例えば *Matsuno* (1966, 図 9) と比較して) Matsuno-Gill パターンとの強い類似性を示す. 高気圧と低気圧, つまり本質的には定常なロスビー波の応答が赤道に跨り, 一方で赤道では東西風が質量のソースから発散し, 質量のシンクに向かって収束している. これは応答のケルビン波成分である. 東西平均した東西流 \bar{u} は赤道においてゼロで亜熱帯では東向きである. このことは熱帯強制と波動平均流相互作用があるにもかかわらずスーパーローテーションが発達しないことを表す. パラメータの広い範囲にわたる追加の解は, このことが強い結果であることを表す. スーパーローテーションがないことが非加速定理から生じることはないということに注意しよう. つまり, 実のところは Matsuno-Gill モデルは摩擦と加熱抵抗を含むので非加速定理は全く当てはまらない.

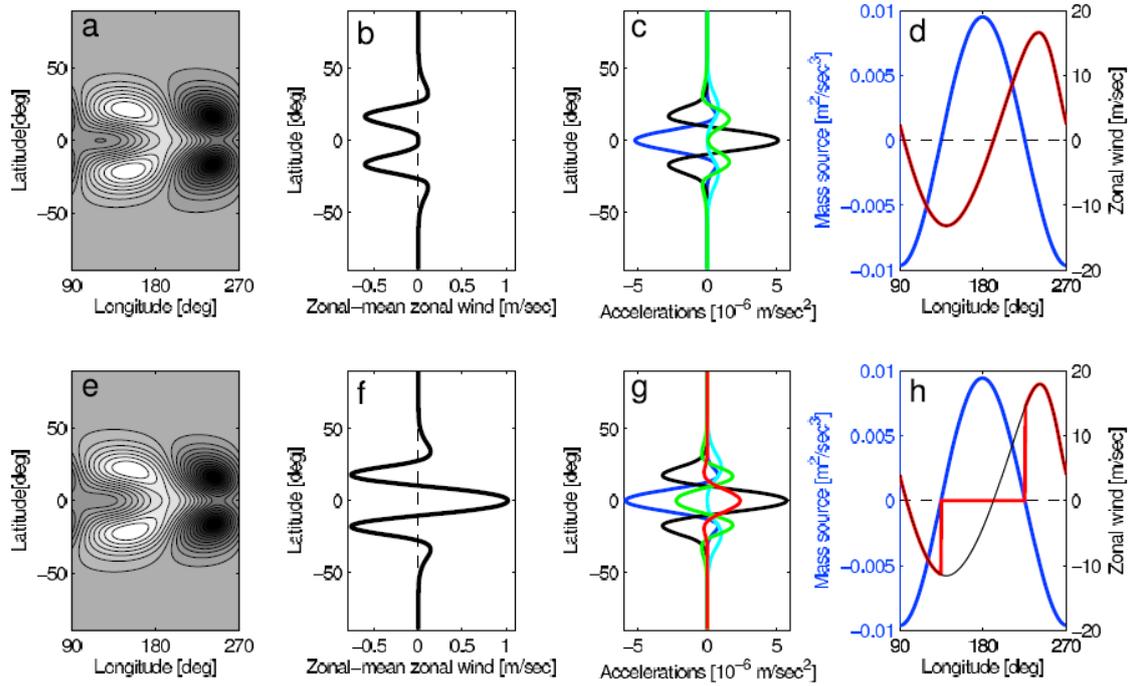


図 1: (上段) $R = 0$ を用いた解と (下段) 方程式 (3) で与えられる R を用いた同一解. (a, e) ジオポテンシャル gh . (b, f) 東西平均した東西風 \bar{u} . (c, g) 平衡状態における東西平均した東西風の加速度成分 (本文を見よ). (d, h) 赤道における質量のソース Q (青線), 赤道における東西風 (黒線), そして層の中へ移流される ($Q > 0$) もしくは層の外へ移流される ($Q < 0$) 東西風 (赤線). わかりやすさのために 1a, 1d と 1e, 1d は領域の半分のみを示す (経度 90° から 270°). どちらの実験も $\tau_{\text{rad}} = \tau_{\text{drag}} = 5$ 日, $\phi_0 = 0^\circ$, $gh_0 = 4000 \text{ m}^2\text{sec}^{-2}$ (Gill (1980)) そして強制振幅 $gS_0 = 0.0098 \text{ m}^2\text{sec}^{-3}$ を採用する.

図 1a 中にある位相の傾きの方向は, なぜこれらの解が赤道上のスーパーローテーションを示さないのかという謎を生じさせる. これらの解の一般的な特徴は, Matsuno (1966), Gill (1980), そしてその後の研究の線形モデルでも明らかではあるが, 赤道付近の速度ベクトルが北半球では主に北西から南東へ傾いており, 南半球では南西から北東へ傾いているということである^{*3}. これらの傾きは, 北半球では $\overline{u'v'} < 0$, 南半球では $\overline{u'v'} > 0$ であることを示しており, 東向き運動量フラックスの赤道向き成分を示唆する. (ここで, u' と v' はそれぞれ東西方向と南北方向の風の東西平均からの偏差であり, オーバーラインは東西平均をとることを示す.) このフラックスはスーパーローテーションを励起するための正しい符号を示す. したがって図 1 (上段) に示されるスーパーローテーションの欠落は驚くべきことである.

Matsuno-Gill 問題においてスーパーローテーションがないことを明らかにする

^{*3}[memo] これは低気圧周りのことを指しているのだろうか. 例えば北半球における赤道付近の速度ベクトルを見てみると, その傾きは必ずしも北西から南東へ傾いているとは言えない気がする.

ために方程式系 (1)-(2) に対する解から東西方向の運動量収支を解析する. 変数を, (オーバーラインで示される) 東西平均と (プライム付きで示される) そこからの偏差に分解し, 東西方向の運動方程式を東西平均することで以下の式が導かれる (例: *Thuburn and Lagneau* (1999))^{*4}:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{v}^* \left[\underbrace{f - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(\bar{u} \cos \phi)}{\partial \phi}}_I \right] - \underbrace{\frac{1}{\bar{h} a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(hv)'u'} \cos^2 \phi \right]}_{II} \quad (5)$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\bar{h}} \overline{u'Q'}}_{IIIa} + \underbrace{\bar{R}_u^*}_{IIIb} + \underbrace{\bar{X}^*}_{IV} - \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial(\bar{h}'u')}{\partial t}.$$

ここで, a は惑星半径であり, $\bar{A}^* \equiv \overline{hA}/\bar{h}$ は任意の物理量 A を厚さで重みづけした東西平均した量, X は東西方向の摩擦を表し, レイリー抵抗に対して $\bar{X}^* = -\bar{u}^*/\tau_{\text{drag}}$ である. 方程式 (5) は変形オイラー平均 (TEM) した運動方程式の浅水系版であり, プリミティブ方程式系の等エントロピー座標系の形式のものと似ている (*Andrews et al* (1987, 3.9 節) を見よ^{*5}). 右辺の項 I, II そして III は, それぞれ以下に起因する加速度を表す:

- (i) 平均子午面循環による運動量の移流
- (ii) (東西方向の) 渦の運動量フラックスの南北成分の収束
- (iii) 渦の東西風領域と渦の質量発生領域間の相互作用 (重要なのは渦の運動量の鉛直方向の輸送)

物理量 R_u は \mathbf{R} の東西成分 (つまり, $Q > 0$ のとき $-Qu/h$, $Q < 0$ のとき 0) である. 図 1d は平衡定常状態に対するこれらの項を表している. ここでは項 IIIb があらゆる点で等しくゼロである.

予想通りだが, 渦の運動量の水平方向の収束を表す項 II によって赤道では東向きの強い加速度と亜熱帯では西向きの加速度が生じる (図 1c の黒線). 一方で, 項 IIIa で表される鉛直方向の渦運動量輸送に関する加速度は赤道で強く, 西向きである (青線). これらの二つの渦の項の間にあるキャンセルによってスーパーローテーションがないことが説明される. 残りの項, つまり平均子午面循環 (項 I, 水色) と質量で重みづけした摩擦 (項 IV, 緑線), は平衡状態では赤道において小さい.

空間速度と質量のソース/シンクのパターンは, 鉛直方向の渦の交換によって生じる赤道上の西向き加速度の物理的な起源を示す. Matsuno-Gill 問題に対して, 赤

^{*4}導出は付録を見よ (未完成).

^{*5}[memo] 『Middle atmosphere dynamics』

道上で東西風がゼロとなる経度が質量生成領域の極値の東にある (図 1d). これは, Matsuno (1966, 図 9) と Gill (1980, 図 1) にある安定で線形な計算においても明らかに可視的な特徴である. この移動のため, 西向き (東向き) の渦の東西風の領域において主に赤道上の質量の生成 (消滅) が生じる. したがって赤道において $\overline{u'Q'}$ は負である. それゆえ $\mathbf{R} = 0$ のとき質量の生成領域も消滅領域も層から, 東向きの柱状積算運動量を取り除き, スーパーローテーションの発生を妨げるような東西平均した西向きの加速につながる.

今, 式 (3) で定められる鉛直方向の運動量の移流項 \mathbf{R} を含む完全な系 (1)-(2) を予測する. 赤道上の質量消滅領域は依然として東向きの柱状積算運動量を局所的に減少させている (なぜなら, その領域は層の外へ正味東向きの運動量をもつ空気を輸送しているためである. 図 1d を見よ). しかしながら, 赤道上の質量生成領域は, もはや局所的な柱状積算相対運動量 uh を変えない (なぜなら, $\mathbf{R} = 0$, つまり赤道上の柱状積算相対運動量を不正に減少させるよう場合とは対照的に, 生成領域はゼロの東西風を持ってくるためである). したがって東西平均すると鉛直方向の渦の項は西向きの加速を起こすままだが, $\mathbf{R} = 0$ の場合と比べてその加速は弱い. 結果として, 式 (5) の鉛直方向の渦の項はもはや東向きの渦の運動量の緯度方向の収束を完全には打ち消さない. そのときスーパーローテーションが起きるはずである. これらの主張を試験するために式 (3) で与えられる \mathbf{R} を含む方程式系 (1)-(2) を解く.

\mathbf{R} の項があるときスーパーローテーションが自然に発生する. 図 1 (下段) は図 1 (上段) と同様に同じパラメータ値に対する方程式系 (1)-(2) に対する解を示す. 二つのジオポテンシャル場は似ており, 質的な東西平均した東西風のパターンは緯度 15° くらいから極方向に一致している. 主な相違点はスーパーローテーションが現れたことである. スーパーローテーションの速さは, 他どの緯度での東西平均した東西風の速さを超えている. 診断 (図 1g) は, 平衡 (安定) 状態において $\overline{u'Q'}/\bar{h}$ の項 (つまり IIIa の項, 青線) は赤道上の水平方向の渦の収束 (II の項, 黒線) をほぼ打ち消しているが, $\overline{R^*}$ (つまり IIIb の項, 赤線) が東向きの加速を与えている. 直感的な理由から予想できる通り, 鉛直方向の正味の渦の項, つまり青線と赤線の和, によって西向きの赤道加速が起こるが, それはもはや水平方向の渦運動量の収束によって励起される東向きの加速を完全には中和しない. 渦の項における不一致と釣り合う摩擦による西向きの赤道加速に対してスーパーローテーションが発生して十分強くなるときのみ運動量平衡が生じる.

今回扱ったモデルにおいて, (\mathbf{R} で表される) 活動的な層と底の層の間での運動量の交換のもつ役割に関しては *Shell and Held* (2004) によって研究されたものとは大きく異なる. 彼らは軸対称ではあるがそれ以外は今回のモデルと似たような 1.5 層の浅水系モデルを解いた. 彼らのモデルでは赤道の渦を含まないため \mathbf{R} に

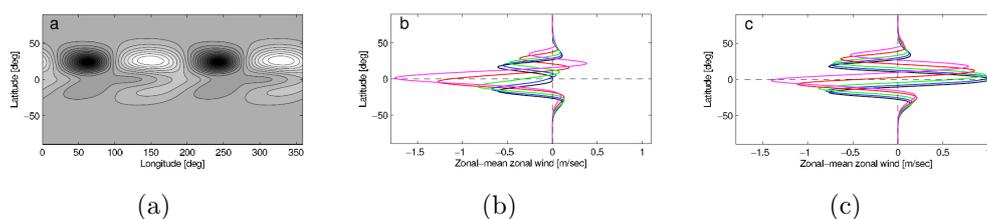


図 2: (a) 赤道から北に 10° 加熱のピークを取り替えたことを除いて図 1 (上段) と同じ実験設定に対するジオポテンシャル場. (b) (標準的な Matsuno-Gill 問題と同様) $R = 0$ と $\phi_0 = 0^\circ$ (黒), 2° (青), 5° (緑), 10° (赤) そして 15° (マゼンダ) を用いた解の東西平均した東西風. (c) 図 2b と同じだが方程式 (3) で与えられた R を用いた数値計算の結果に対するもの.

対する彼らの表現を入れる速度は東西平均の値であり, このことは彼らの場合, R によってスーパーローテーションに逆らう西向きの抵抗が生じる. しかしながら, ここで扱われている Matsuno-Gill 問題に対して, R へ寄与するような赤道上の質量生成領域は, スーパーローテーションが存在していても主に西向き流れる. したがって, R は, スーパーローテーションを起こしうる東向きの加速に寄与する. このメカニズムが示唆していることは, 高速回転するジェットにおける東西平均した東西風の速さは渦の東西方向の速度を超えることができないということである.

赤道付近での対称性が役割をもたない場合にスーパーローテーションが発生するかどうかを調べるために, 赤道から最大 15° まで取り替えた加熱の最大値を用いた一連の計算を実行した. 対称性を崩すために ϕ_0 は微小であるがゼロではない場合は, $\phi_0 = 0^\circ$ でそれ以外と同じ場合とは無視してもいいくらいに異なる. 有限の ϕ_0 をもつ解は元の解の質的な特徴を保持するが赤道付近で非対称となる (例として図 2a を見よ). $R = 0$ のとき, (もともと亜熱帯にあった) 正味西向きの渦の加速領域が赤道へ移動するので, 有限の置き換えにより赤道で西向きの東西平均した東西風がもたらされる (図 2b). これらの結果から $R = 0$ のときにスーパーローテーションが発生しなかったことが Matsuno-Gill モデルの一般的な結果であり対称性のねじれではないことを示す. R が含まれるとき (図 2c), ϕ_0 があまり大きくない限りは赤道上のスーパーローテーションが常に生じる.

4 議論

Matsuno-Gill 型の強制を用いた 1.5 層モデルによって, 安定した熱帯加熱で強制される理想化された GCMs (*Suarez and Duffy* (1992), *Saravanan* (1993), *Kraucunas and Hartmann* (2005), *Norton* (2006)) において赤道上のスーパーローテーションを形成する上で重要なメカニズムを理解することを議論する. 理想化された GCMs

(例えば, Norton (2006), 図 7b と 7d を見よ) では, 水平方向の収束がわずかに有利な場合, 赤道上で水平方向と鉛直方向の渦運動量の収束 (方程式 (5) 中の項 II と III) の間で近い打ち消しも生じる (?).

解が線形的に振る舞うような任意に小さな振幅も含めてあらゆる強制振幅においてスーパーローテーションが形成されることがわかる. このことは *Suarez and Duffy* (1992) と *Saravanan* (1993) で研究されたケース, つまり閾値を超える強制振幅に対してのみスーパーローテーションが発達したケース, とは対称的である. 彼らのケースでは, 熱帯波の強制がハドレー循環と中緯度の渦が熱帯に伝播することによって与えられる西向きのトルクに勝るような非常に大きな振幅を獲得した場合, 熱帯波の強制はスーパーローテーションを駆動させるだけである. 今回扱ったモデルではハドレー循環と中緯度の渦の強制はなく, スーパーローテーションを形成するメカニズムは固有の基準値をもたないと結論付けてもよい.

今回の解と, *Matsuno* (1966) と *Gill* (1980) で行われた安定で線形の数値計算の間のつながりを強調するため, 薄い層で放射と摩擦の時定数が等しいような低振幅のケース (図 1) を説明のためにわざと選ぶ. このことから小さな東西平均した東西風が導かれる. しかしながら, 30 msec^{-1} かそれ以上という地球のような速さをもつ解は, 比較的強い強制振幅と, 放射の時定数を十分に超える摩擦の時定数を用いることで簡単に達成される.

ここで述べた議論は, もし熱帯波の強制が強いかもしくは強制を妨げるような要因 (ハドレー循環と中緯度の渦の強制) が弱いならば, 過去の気候においても将来の気候においても, あるいは他の惑星においても, 赤道上のスーパーローテーションは生じうるということを示唆する. 例えば木星や土星では赤道上のスーパーローテーションが確認されている. もし赤道付近で大気の大規模な対流が大きなスケールで体系化されているならば, まだ知らない加熱における体系化された経度方向の差が大きくなり, ここで議論したメカニズムによってスーパーローテーションが生じるかもしれない. さらに「ホットジュピター」, 他の星々の非常に近いところで周りを回っている巨大ガス惑星, は昼夜で放射加熱に巨大な差があり, 三次元循環モデルにおいて赤道上のスーパーローテーションを発達させている (例えば *Showman et al* (2009)). これはここで議論したものと同じメカニズムによるものかもしれない.

付録

1 式 (5) の導出

東西方向の運動方程式と質量保存の式は、成分表示で以下のように書ける:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{g}{a \cos \phi} \frac{\partial h}{\partial \lambda} - fv = R_u - \frac{u}{\tau_{\text{drag}}}, \quad (\text{SP.1})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(hu)}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(hv \cos \phi) = Q, \quad (\text{SP.2})$$

始めに、東西平均した質量保存の式は、

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(\bar{h}v \cos \phi) = \bar{Q}, \quad (\text{SP.3})$$

と書ける. 次に東西平均した東西流 \bar{u} に対する方程式を得るために、

式 (SP.1) $\times h \cos \phi$:

$$h \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{hu}{a \cos \phi} \frac{\partial m}{\partial \lambda} + \frac{hv}{a} \frac{\partial m}{\partial \phi} + \frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{h^2}{2} \right) - fhv \cos \phi = hR_u \cos \phi - \frac{hm}{\tau_{\text{drag}}},$$

式 (SP.2) $\times m$:

$$m \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{m}{a \cos \phi} \frac{\partial(hu)}{\partial \lambda} + \frac{m}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(hv \cos \phi) = Qm,$$

を得る. これらの二式を足し合わせると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(hm)}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(hmu)}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(hmv \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{h^2}{2} \right) - fhv \cos \phi \\ & = Qm + hR_u \cos \phi - \frac{hm}{\tau_{\text{drag}}}, \end{aligned}$$

を得る. ここで $m \equiv u \cos \phi$ である. この式を東西平均すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{hm}) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(\bar{h}m \cos \phi) - f\bar{h}v \cos \phi = \bar{Q}m + \bar{h}R_u \cos \phi - \frac{\bar{hm}}{\tau_{\text{drag}}}, \quad (\text{SP.4})$$

となる. ここから $\overline{AB} = \overline{A\bar{B}} + \overline{A'B'}$ を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{h\bar{m}} + \overline{h'm'}) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{h\bar{v}m} \cos \phi + \overline{(h'v)'m'} \cos \phi \right] - f\overline{h\bar{v}} \cos \phi \\ = \overline{Q\bar{m}} + \overline{Q'm'} + \overline{hR_u} \cos \phi - \frac{\overline{h\bar{m}}}{\tau_{\text{drag}}}, \end{aligned}$$

とわかる. さらに $m = u \cos \phi$ であることから,

$$\begin{aligned} \overline{h} \cos \phi \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cos \phi \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\overline{h'u'} \cos \phi) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{h\bar{v}u} \cos^2 \phi + \overline{(h'v)'u'} \cos \phi \right] - f\overline{h\bar{v}} \cos \phi \\ = \overline{Q\bar{u}} \cos \phi + \overline{Q'u'} \cos \phi + \overline{hR_u} \cos \phi - \frac{\overline{h\bar{u}} \cos \phi}{\tau_{\text{drag}}}, \end{aligned}$$

を得る. この式を $\overline{h} \cos \phi$ で割ると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\bar{u}}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} - \frac{1}{\bar{h} a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{h\bar{v}u} \cos^2 \phi - \overline{(h'v)'u'} \cos^2 \phi \right] + f\bar{v}^* \\ + \frac{\overline{Q\bar{u}}}{\bar{h}} + \frac{\overline{Q'u'}}{\bar{h}} + \overline{R_u}^* - \frac{\bar{u}^*}{\tau_{\text{drag}}}, \end{aligned}$$

が得られる. ここで $\bar{A}^* = \overline{hA}/\bar{h}$ である. この式に式 (SP.3) を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{v}^* \left[f - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial(\bar{u} \cos \phi)}{\partial \phi} \right] - \frac{1}{\bar{h} a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(h'v)'u'} \cos^2 \phi \right] \\ + \frac{1}{\bar{h}} \overline{u'Q'} + \overline{R_u}^* - \frac{\bar{u}^*}{\tau_{\text{drag}}} - \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial(\overline{h'u'})}{\partial t}, \end{aligned}$$

が得られ, 本文中の式 (5) が導かれた.

2 Shell and Held (2004) による項 R の説明

項 R は下層の質量交換が上部の活動層の運動量へ与える効果を表す. ここで $Q \equiv (h_{eq} - h)/\tau$ とすると,

$$R = \begin{cases} -Qu/h, & (Q > 0); \\ 0, & (Q < 0), \end{cases} \quad (\text{SP.5})$$

である. 下層から持ち上げられる空気はその空気と, その層のゼロの相対角運動量を運ぶ. 通常, 赤道では上昇運動があるために, この項は西向きの赤道流れの減衰を与える. 上層から下層へ下降する空気はその空気と, 上層の運動量を運び, したがって上層の運動量に影響を与えない. 表面摩擦を下層において速度を高速にゼロに戻すこととみなすことができる. ここで R は多レベルモデルにおける東西運動量の鉛直移流と等価である. [略]