

二次元乱流の数値シミュレーション

Douglas K. Lilly

0 要旨

二次元乱流の構造に関して Kraichnan の予測の妥当性を検証するために二次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式が数値積分される。数値シミュレーションされた乱流は、人為的な強制関数によって生じる。強制関数は、スカラー波数（以下、単に「波数」と呼ぶ） k_ℓ 付近の狭いスペクトル帯の範囲内に位置するフーリエモードのランダムに変化する集合から構成されている。一定のエネルギー注入率によって保たれている乱流の場合、Kraichnan は、 k_ℓ より低波数側の $k^{-5/3}$ 領域と、 k_ℓ より高波数側の k^{-3} 領域の二つの冪乗則エネルギースペクトルの発展を予測している。切断誤差とエイリアジング誤差は計算の有用なスペクトル領域を、十分に満足していく試験に対して望ましいものよりも小さなものに制限するが、計算結果はこれらの予測と一致する。予測と結果は、地球流体力学のいくつかの分野と、他の数値シミュレーション実験に対する正しい解釈に明らかに適切である。

1 序論

本論文で報告される主な計算は、ランダムでほとんど単色の一定の振幅強制^{*1}によって生じた二次元乱流の性質において Kraichnan の予測の妥当性を検証するために用いられた。もし妥当であれば Kraichnan によって推定されるモデルは地球流体力学における様々な準二次元乱流に適用されるだろう。計算結果はまた、それらを得るために使われた計算手順の妥当性における多少厳しい検証を与える。

^{*1}[原文脚注 1] R. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967) .

2 Kraichnan の仮説

コルモゴロフスペクトルの妥当性は明らかであるけれども、乱れた流れの慣性領域においてコルモゴロフエネルギースペクトルを導く仮定は形式上、三次元流れに制限されないということが長く言及されてきた。二次元非粘性流れは、運動エネルギーに加えてもう一つの二次の不変量である渦度の二乗、ここで定義よりエンストロフィー^{*2}の二倍、が含まれていることもまた長く言及されてきた。したがって、粘性のある場合、二種類の散逸、つまり、運動エネルギー散逸率 ϵ とエンストロフィー散逸率 η 、が重要であると考えられる。同様に、Kraichnan は二種類の慣性領域、エネルギーが波数空間内で輸送されるコルモゴロフの慣性領域とエンストロフィーが同様に輸送される新しい慣性領域、が形式上定義され得ると言及された。もちろん、前者は(三次元乱流において)よく知られていて、実験的に十分に実証されている、波数 k のスカラーエネルギースペクトル(以下、単に「エネルギースペクトル」と呼ぶ)に対する $k^{-5/3}$ 冪乗則を導く。一方で、後者はよく似た次元の推論により k^{-3} 則を導く。Kraichnan はこれらの輸送が相互に独立的であることを証明することもできた。したがって $k^{-5/3}$ スペクトルは大きなスケールにも小さなスケールにもエンストロフィーを輸送することができないし、同様にエネルギーは k^{-3} 領域内の波数空間において伝播されない。Leith^{*3} によってエネルギースペクトル方程式における簡単化されたクロージャー近似の文脈の中で似た証明がなされた。

ここでは仮想的な物理的状況を考えよう。波数 k_ℓ 近傍におけるスペクトル空間の狭い領域から選んだ要素から構成されるが等方的で一様であるランダムな強制擾乱が、大きいが有限の(5節で定義される)レイノルズ数をもつ粘性流体中で絶えず運動エネルギーとエンストロフィーを生成する。僅かに修正された形でのKraichnan の仮説は発展するエネルギースペクトルの形に関して以下の予測から構成される:

$$E(k) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{d\bar{E}}{dt} \right)^{2/3} k^{-5/3}, & k_e < k < k_\ell, \\ \beta \eta^{2/3} k^{-3}, & k_\ell < k < k_d. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $E(k)$ は波数 k のエネルギースペクトル、 \bar{E} は全エネルギーで、

$$\int_0^\infty E(k) dk,$$

に等しい。 k_ℓ は強制擾乱の中間の波数であり、 k_e と k_d はそれぞれスペクトルの低波数と高波数の極限である。 α と β は無次元定数である。この理想化されたモデ

^{*2}[原文脚注 2] 渦度の二乗の二分の一である「エンストロフィー」という言葉は Nickel によって初めて示され、Leith (参考文献 3) によって論文に現れた。ギリシア語の語源で「回る」を意味する「strophe」から生まれた。

^{*3}[原文脚注 3] C. E. Leith, Phys. Fluids 11, 671 (1968) .

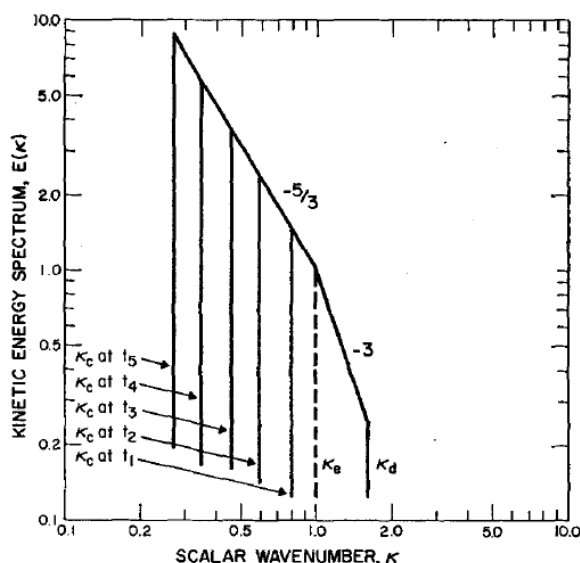


図 1: Kraichnan によって予測され、本論文で解釈された強制された二次元乱流におけるエネルギースペクトルの概念図。エネルギーは波数 k_ℓ 周辺で注入もしくは生成され、低い極限 k_e を移動させながら、発達する $k^{-5/3}$ 領域内を通じてより低い波数へ輸送される。二乗平均渦度 (エンストロフィー) が k_ℓ でさらに生成され、散逸スケール k_d で終わる k^{-3} 領域内を通じてより高い波数へ輸送される。(この図にはないが) 理想的には $k_e \ll k_\ell \ll k_d$ である。

ルのスペクトルが図 1 に両対数図で描かれており、時間とともにその発展を示している。高波数スペクトルではエンストロフィーがエンストロフィー散逸率 η でより高い波数へ輸送され、 k_d は散逸長さスケールを表している。運動エネルギーはこの領域内で輸送されない。したがって、もし $k_\ell \ll k_d$ ならばそれは散逸されない。しかし、運動エネルギーは $k^{-5/3}$ スペクトル領域内でより大きなスケールへ輸送され、低い極限 k_e は必然的に時間の減少関数である。結局、 k_e が、例えば地球もしくは他の物理的境界のサイズのような物理的な系のスケール限度に達したとき、エネルギーは最も低い可能な波数において増え始めなければならない。

限界波数 k_e と k_d はモデル上で理想化されたものであり、スペクトルで急落の兆候として扱われるべきではない。より完全な解析ではスペクトルは、 $d\bar{E}/dt$, η , k , 粘性率そして時間について一般化された関数として考えられるべきである。加えて、同様の解析から低波数スペクトルは無次元群 $(d\bar{E}/dt)^{1/2}kt^{3/2}$ の関数であると予測される。そこで、現在の近似では $k_e \propto (d\bar{E}/dt)^{-1/2}t^{-3/2}$ である^{*4}。

^{*4}付録 A および B 参照のこと。

3 数値モデル

Kraichnan によって予測された状況のシミュレーションに適切な微分方程式は次式の通りである:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta = F + \nu \nabla^2 \zeta, \quad (2)$$

$$\mathbf{V} = -\mathbf{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \zeta = \nabla^2 \psi. \quad (3)$$

ここで, ζ は流れの場である x - y 平面に垂直な渦度成分であり, 流線関数 ψ の二次元ラプラシアンに等しい. $F(x, y, t)$ は強制関数 (実際には単位質量当たりの外力の回転) であり, ν は動粘性係数である. 境界条件は x 方向にも y 方向にも周期的であることにすると, 運動は正方形の次元に等しい波長で周期的である. 初めに運動場はゼロである. 式 (2) と (3) の数値積分はそれらをデカルト格子に定められた変数に作用する有限差分方程式に置き換わって実行される. ψ に関する式 (3) にある Poisson 方程式の解法は差分方程式の厳密解を求める FFT 法によって実行される.

これらの数値実験の大部分において式 (2) の非線形項に対して用いられた数値空間差分法は Arakawa^{*5} によって開発された二次精度のスキームである. これは非線形項内で運動エネルギーとエンストロフィーを保存する. いくつかの数値実験で Arakawa の四次精度のスキームが比較のために用いられる. 式 (2) と (3) にあるラプラシアンは中間値と, それに直接隣り合う四点を用いる二次精度の表現によって近似される. 時間積分は二次の Adams-Bashforth 法によって実行される. これはわずかに不安定であると知られている. しかし, 非粘性で強制なしの場合, 時間ステップは, 時間ステップ当たりのエネルギー拡大が 0.1% (いくつかの場合で 0.01%) 以下になるように小さく制限されている. おそらく多くの重大な数値誤差は非線形相互作用における高波数成分のエイリアジングによるものである. Arakawa の差分法においてエイリアジングは不安定性をもたらすことはないが, ある程度, 特に格子間隔の四倍以下の波数において, スペクトルを歪める. 本実験では 64×64 の網状格子が用いられる. それは各方向に波数 32 までフーリエ成分を与える. したがって, おそらく 16 以上の波数をもつ成分はエイリアジング誤差からの重大な変形を受けやすい. これらの数値計算法およびエイリアジング安定性問題に関するさらなる詳細は著者^{*6} による以前の論文中にある.

強制関数の規定は明らかに数値実験の決定的な部分である. Kraichnan は一定のエネルギー源とエンストロフィー源を想定したが, それらは ψ と F , ζ と F の

^{*5}[原文脚注 4] A. Arakawa, J. Comput. Phys. 1, 119 (1966) .

^{*6}[原文脚注 5] D. K. Lilly, Monthly Weather Rev. 93, 11, (1956) .

間に一定の共分散を必要とするためにそれらをシュミレーションすることは容易な問題ではない。 F の振幅は一定にするが、その位相とフーリエ成分の構成が時間とともにランダムに変化させることは簡単なようである^{*7}。 F は以下の時間差分方程式から計算される:

$$F_{n+1} = R_n F_n + (1 - R_n^2)^{1/2} \hat{F}_{n+1} . \quad (4)$$

ここで、 F の下付き文字は時間ステップの量を表し、 $R_n (\leq 1)$ は無次元の相関係数^{*8}、 \hat{F}_n は F_n からランダムに選ばれる部分である。式 (4) の両辺を自乗し、 F_n と \hat{F}_{n+1} は相関がないことに留意すると、 $\overline{F_n^2} = \overline{\hat{F}_{n+1}^2}$ ^{*9} (バーは空間平均を表す) ならば、 $\overline{F_n^2}$ は時間とともに一定のままであることは明らかである^{*10}。 \hat{F}_n の項はガウス分布からランダムに選ばれることで得られる。これは k_x, k_y 空間内の幅 $2k_\ell$ をもつ正方形の表面にあるすべての波数成分に対する振幅係数である。したがって、 $k_x = k_\ell$ か $k_y = k_\ell$ のいずれかのすべてのフーリエモードは \hat{F}_n に表されるが、これらはランダムで不定の重みが付く。 \hat{F}_n の全振幅は構成している振幅を規格化することで制御されているので、それらの自乗の和は一定である。後に与えられるエネルギースペクトルは、解析的研究においてよく使われるような半径 k の円上というよりはむしろ、辺 $2k$ の正方形上で自乗された振幅係数の和として得られる。

^{*7}強制関数 $F(x, y, t)$ をフーリエ級数展開する:

$$F(x, y, t) = \sum \hat{F}(k_x, k_y, t) e^{i(k_x x + k_y y)} .$$

ここで、 \hat{F} を、

$$\hat{F}(k_x, k_y, t) = A(k_x, k_y) e^{i\theta} ,$$

とすることで波数 k_ℓ で系を強制する。ここで、 $\theta = \theta(k_x, k_y, t)$ の値には k_x, k_y, t 毎に異なる乱数を用意する。

^{*8} R_n と下付き文字があるが、これは時間ステップを意味していないことに注意する。

^{*9}原文中には、

$$\overline{F_1^2} = \overline{\hat{F}_1^2} ,$$

とあったがこれは誤りである。

^{*10}式 (4) を自乗し空間平均すると、

$$\begin{aligned} \overline{F_{n+1}^2} &= R_n^2 \overline{F_n^2} + 2R_n(1 - R_n)^{1/2} \overline{F_n \hat{F}_{n+1}} + (1 - R_n) \overline{\hat{F}_{n+1}^2} \\ &= R_n \overline{F_n^2} + (1 - R_n) \overline{\hat{F}_{n+1}^2} , \end{aligned}$$

となる。ここで、仮定 $\overline{F_n^2} = \overline{\hat{F}_{n+1}^2}$ より、

$$\overline{F_{n+1}^2} = \overline{\hat{F}_n^2} ,$$

が得られ、 $\overline{F_n^2}$ が時間によらず一定であることが明らかである。

式 (4) を以下の微分方程式に対する近似として書くこともできる:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{F}{\tau} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{F}}{(\tau \Delta t / 2)^{1/2}}. \quad (5)$$

ここで,

$$\frac{\tau}{\Delta t} = \frac{1 + R_n}{2 - R_n}, \quad (6)$$

であり, Δt は積分時間刻みである. $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると \hat{F} は同じ振幅のままであるが, 時間間隔 Δt に対してのみ自己相関がある. したがって, 極限では $\partial F / \partial t$ は特異となる. それにもかかわらず, 式 (5) は形式上以下のように数値積分される:

$$F(t) = \exp(-t/\tau) \left[F(0) + \int_0^t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{F}(t')}{(\tau \Delta t / 2)^{1/2}} \exp(t'/\tau) dt' \right]. \quad (7)$$

F の時間微分は特異だが F の項はよく定義される. ゆえに, 数値積分の線形段階において時間の関数として ζ に対する一般的な解析解, より有効に言えば, 運動エネルギーとエンストロフィーを作り出すために式 (7) の関数である式 (2) の線形化された形に代入できる. 6 節で上の表現を利用しよう.

式 (6) を通じて R_n は F の減衰時間 τ の関数である. 式 (2) の数値解において計算安定性を維持するために時間ステップを減らす必要がある. しかし, 任意の数値実験に対して τ を一定であるように選ぶならば, 時間の切断誤差を除いて, 結果は Δt の関数にならないであろう. したがって, 式 (6) について解き,

$$R_n = \frac{1 - (\Delta t / 2\tau)}{1 + (\Delta t / 2\tau)}, \quad (8)$$

強制関数を決めるために式 (4) に加えてこの表現を用いる. このとき, 結果は F の大きさ, 波数 k_ℓ , 粘性係数 ν そして利用可能なモデル解像度だけでなく τ の関数でもある.

適切なスケーリングによって, 二つのパラメータを消去する^{*11}. すべて $|F|^{1/2}$ によって縮尺された ζ , t^{-1} , そして τ^{-1} , $2\pi k_\ell^{-1}$ によって縮尺された長さ, さらに $2\pi k_\ell^{-1} |F|^{1/2}$ によって縮尺された速度を用いると式 (2) とそれ以下の式は同じ形式のままである. ここで, ν は $4\pi^2 |F|^{1/2} / k_\ell^2$ によって縮尺されている. 新しい無次元形では, $|F| = 1$, $k_\ell = 2\pi$ となる. ここで, 解は, ν , τ , $2\pi k_\ell^{-1}$ によって縮尺された格子間隔, そして格子点の数の関数となる. 無次元の粘性係数はレイノルズ数の逆数と考えられるが, その概念は, 関係はあるが異なる比に割り当てられている.

^{*11}付録 C 参照.

4 数値実験結果

二つの無次元の ν , ($\tau = \infty$ という定常的な強制関数の場合を含む) 三つの τ , そして二つの縮尺された格子間隔に対して数値積分を実行した. 数値スキームの時間ステップと精度に関していくつかの実験がなされた. 一つのケースでは, 全く同じパラメータを用いて, 但し, ランダムな数列の異なる部分から発生される強制関数を用いて数値積分が繰り返された. これは, 一つの数値実験の重要な統計量がアンサンブル平均にとって良い近似であると考えられるかどうかを決めるためになされている. (明らかに一つの設定においてありうる.)

図 2 は数値実験のうち一つに対する初期段階の強制関数^{*12} の数値解析された場である. 詳細な構造は絶えず変化するが, すべての後の時刻における F の様子の典型例である. 強制関数は, 各方向に 7 つもしくは 8 つの周期をもっているが, ある方向において同じ波数, 他方向ではわずかに異なる波数のモードを叩くことで明らかに大きなスケールが変調された準周期的なものである^{*13}. このケースでは格子間隔は $1/8$ であり^{*14} 格子点の数は各方向に 64 点である. よって, F の成分はすべて少なくとも一つの方向に正方形にわたる 8 つの波をもつ. 慣例的に $k_\ell = 2\pi$ であるが, この強制関数を波数 8 のうちの一つであるとする.

数値計算の初期段階では, その時間発展はわずかな粘性減衰を伴ってほとんど単色場の基本的な線形成長であるから, 渦度も流れ関数も図 2 とよく似ている. 100 ステップ目以降では, 非線形項が波数空間において支配的になり, パラメータに幾分依存するが高速なエネルギー分散となる. 図 3 (a) および (b) は波数 8 の実験に対する 160 ステップ目での流れ関数と渦度を示している. ここで, $\tau = 0.5$, $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$ である (以降, 本論文ではこれを基本的な数値実験と呼ぶことにする). 渦度場と流れ関数場の間には負の相関があることが確認されうるが, 渦度場は流れ関数場と比べて明らかに小さい構造を示している. 図 4 (a) と (b) からわかるように, 後の時刻では高波数の渦度が, 次第に低波数の流れ場のシア領域とともに発展する. 流れ関数場は最終的に一つの支配的な最大・最小のセル対とな

^{*12}本文中には, 「初期の強制関数」とあるが, 図 2 に示されているように変調された場が形成されるためには時間がかかるために, ここでは「初期段階の強制関数」と訳した.

^{*13}近い波数 (もしくは波長) が重ね合わさることで以下のように振幅の変調が起こる:

$$\begin{aligned} \sin kx + \sin(kx + \Delta kx) &= \sin kx + \sin kx \cos \Delta kx + \cos kx \sin \Delta kx \\ &= (1 + \cos \Delta kx) \sin kx + \sin \Delta kx \cos kx . \end{aligned}$$

^{*14}すでに 3 節に述べられていたように, ここでは長さを $2\pi k_\ell^{-1}$ でスケールしている. 領域 $2\pi \times 2\pi$ を上のようにスケールした場合 (ここで, $k_\ell = 8$ である) 領域は 8×8 となり, 格子点数を 64×64 とすれば各方向の格子間隔は $1/8$ であろう.

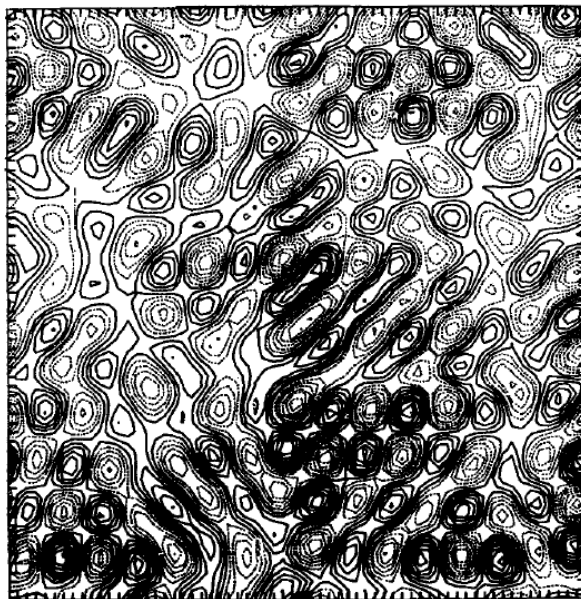
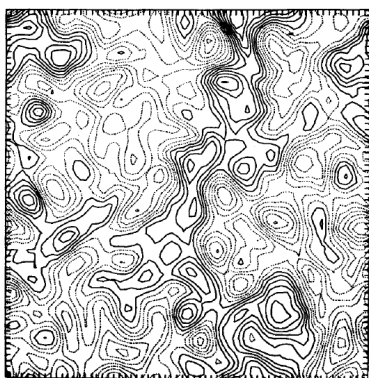


図 2: 基本実験における強制関数 F の典型例. 強制関数 F は (境界線に沿ってハッチマークに表示された) 格子線の交差点に置いてのみ定義されるが, 簡単に解釈するために連続場のように機械的に解析されてプロットされたものである.



(a)



(b)

図 3: $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$, $\tau = 0.5$ の設定での波数 8 の実験における 160 ステップ目, $t = 10.87$ での流れ関数 (a) と渦度 (b). ここで, これらの値はすべて無次元の単位である.

る. 平均速度や循環が生成されないために, 特定のセルの向きが任意でおそらくランダムであるけれど^{*15}, これは系において可能な最小波数のモードである.

^{*15}ここで, 平均速度が生成されないということは, つまり流れ場の向きがランダムであることとして循環が生成されないということは, つまり渦度場の向きがランダムであることの二点を確認しておこう.

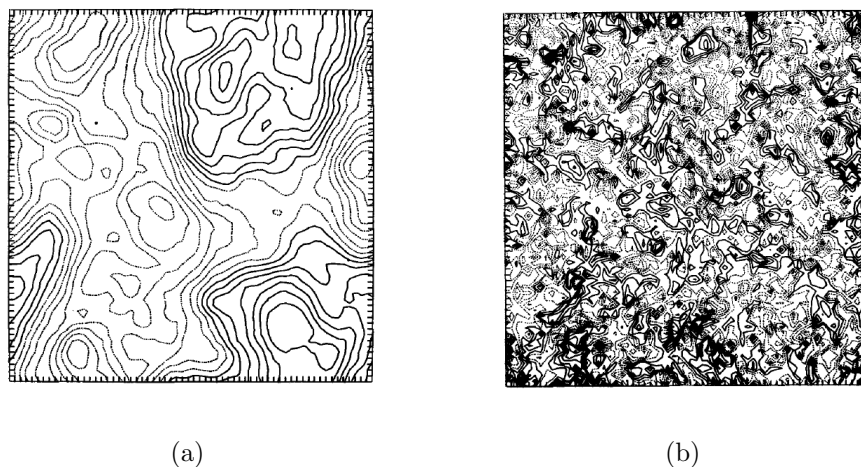


図 4: 2360 ステップ目, $t = 75.45$ における流れ関数 (a) と渦度 (b). その他の設定は図 3 と同様.

図 5 には基本実験におけるエネルギースペクトルの時間発展を表しており, これは波数空間内の正方形周りの寄与を足し上げることで得られる. 適切な冪乗則の線^{*16} (破線部) が重ねられている. $k^{-5/3}$ の低波数スペクトルの予測された発展は明らかによく確かめられる. 2200 ステップ目まで $k < k_\ell$ の領域全体は飽和しており, 波数 1 においてエネルギーがゆっくり集積している. 一方で, 高波数スペクトルは Kraichnan の予測をあまり満足しない検証である. $-\frac{5}{3}$ と -3 の間に明らかに勾配がある. もしくは, さらに可能性が高い場合には, -3 の領域が一オクターブかそのくらいに存在しているが, (高波数スペクトルにおいて) 切断誤差とエイリアジング誤差によって歪められている. ν を 4 倍ほど大きくした実験では粘性による切断の特徴が現れたが, 基本実験ではその跡がない. 波数 32 における急落を除いて同所的な不規則性は大抵瞬間的なものである. 波数 32 における急落はこの波数成分がその他の波数成分のように足しあげられたもののちょうど半分 (sin の項が消える) から成ることが原因である. 適切な比較のためにスペクトルの最終点はその縦座標を二倍しておくべきだった.

明らかな高波数の不一致を起こす数値誤差の原因があるかどうかを判断するために三つの数値実験が実行された. 一つ目には, 基本実験の 1800 ステップ目から再び開始して, 半分に切った時間ステップを用いて, 追加で 1200 ステップ分計算した. この手順により効率的に時間切断誤差と, それに伴う 8 倍の高波数の増幅を減らした. 次の実験では, 同じ手順を適用したが, 二次精度の Arakawa 空間差分法を四次精度法に変更した. 空間切断誤差は, 主に物理量のパターンの輸送における

^{*16}原文中には, “curves” という単語が記述されていたが, ここでは単に「線」と訳した.

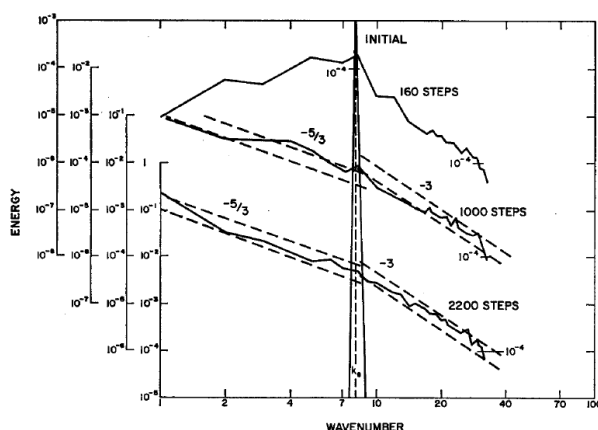


図 5: 対数でプロットされた 1, 160, 1000, 2200 ステップ目におけるエネルギースペクトル $E(k)$. 比較のために $-5/3$ および -3 の勾配にある破線が重ねられている.

位相誤差であると思われる, それによって急激に減った. 三つ目の追加実験では, 時間ステップの基準を半分にしながらかつ強制関数を波数 4 に適用させて, 積分全体を繰り返した. この実験では, エンストロフィー慣性領域をエイリアジングによって大きく作用されたものよりも大きなスケールに拡張することで, エイリアジング誤差の効果を試験するつもりであった. 基本実験と三つの追加実験に対するエネルギースペクトルを時間を一致させて図 6 に示してある.

図 6 にある曲線を比較すると, 時間切断誤差を減らしてもエネルギースペクトルに重大な変化がないことがわかる. しかし, 実際は四次精度の方式を利用することで空間切断誤差を減らすと, 数値計算されたスペクトルと予測されている k^{-3} の形式の間に不一致が増えた. この結果は, このように差分法の精度を改善することでエイリアジング誤差の幅が増えることがわかることから, 波数のエイリアジングが主な要因であるという推定と一致する. 三つ目の追加実験の結果を示すスペクトルの曲線はこの推定をよく示している. 他の実例で示されている一オクターブの近似的な領域と比較すると, 約 4 から 16 の波数から二オクターブの k^{-3} 領域を表している.

図 7 はエネルギースペクトルにおける三つの成分に対する時間依存性の図であり, これは基本実験における波数 4, 8 そして 12 に一致する. 波数 8 に対する強制要素では, 初期の線形段階が大きなオーバーシュートを伴って終了し, ゆっくり減衰する準平衡状態に明らかに近づくような, ゆっくりとした一連の減衰振動が続くことがわかる. より低波数のモードは似た特徴を示すが, より後の時刻でより小さな極値をもつ. そして, 平衡状態に落ち着く前にオーバーシュートする. より高波数のモードは幾分か早く近似的な平衡状態へ向かうが, 他のモードとの非線形相互作用によって平衡状態の周りで連続的に振動している.

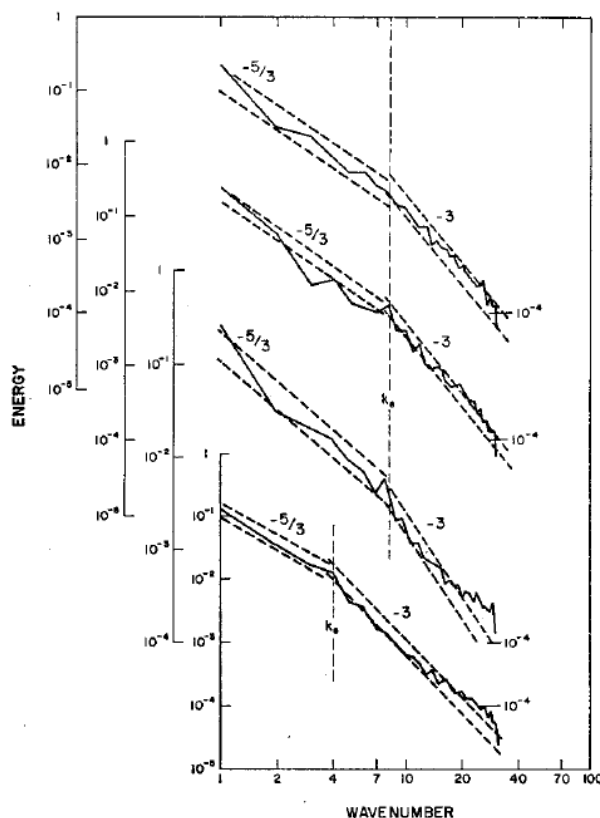


図 6: 一段目: 図 5 の最後の曲線の繰り返し. 二段目: 1800 ステップ目より後で半分にした時間ステップを用いて 3000 ステップ目での $E(k)$ 三段目: 上と同様だが, 非線形項の計算に四次精度の差分法を用いている. 四段目: 2320 ステップ目の $E(k)$ だが, 波数 4 の要素から組まれた強制関数を用いている.

図 8 には, 基本実験に対する時間の関数として全エネルギー, 全エントロフィーそしてエネルギー生成率 $-\overline{\psi F}$ が示されている. 統計的解析のために 40 ステップ毎の結果のみが保存されているために, 生成率は, 示されているものより幾分大きな振動数をもつ大きな時間振動がある. これらの振動は主に, 強制関数と流れ関数の波数 8 成分間の相関が大きく変化することによるものである. 時間振動は, 大規模な大気の循環やその実験的かつ数値的な類似物において観測される振動現象^{*17}と非線形振動に似ているようである. $-\psi$ と F 間の相関が増加する期間に強制モードのエネルギーはまた急速に減少する. その増加は, モードからエネルギーを取り除き $-\psi$ と F を切り離そうとする非線形相互作用の増強により確認される. このタイプの周期的なふるまいは Lorenz^{*18} によってよりきれいな形式で研究さ

^{*17}Hide (1953) は回転水槽実験において, 角速度 Ω と水平温度 ΔT の組み合わせにより水槽内を移流しながら周期的に形を変える波を見つけ, これを “vacillation” と名付けた. この単語は, “variable oscillation (変化しやすい振動)” を意味する造語である.

^{*18}[原文脚注 6] E. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20**, 448 (1963).

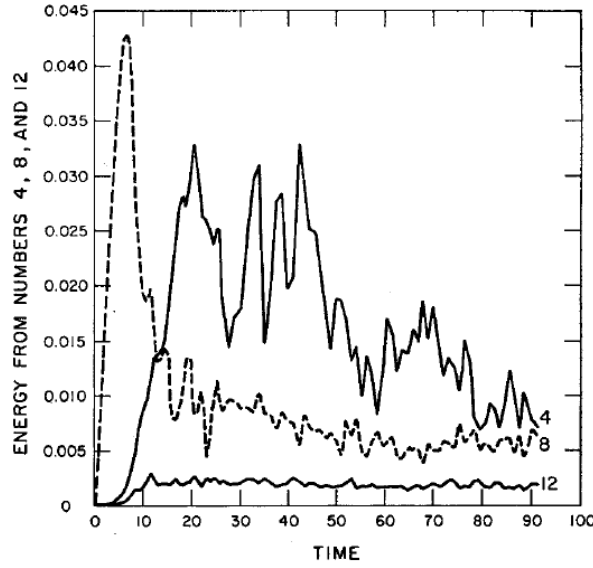


図 7: 波数 4 (実線上部) ,8 (破線) そして 12 (実線下部) から全運動エネルギーへの寄与. (図 3-5 に示されている) 基本実験に対する時間を背景にプロットされている.

れており, 二次元流体もしくは準二次元流体で明らかに共通の (もしかすると限定的) である.

5 普遍定数と流れパラメータの計算

上の結果は Kraichnan の予測を検証するために十分であると考えられるということ仮定して, 式 (1) 中の定数 α と β を見積もる立場にいる. 始めに, わずかなエネルギー散逸と一定のエンストロフィーのもとでエネルギーとエンストロフィーの変化に対する方程式は以下のように書けることに注意する:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\bar{\psi F}, \quad (9)$$

$$0 = \bar{\zeta F} - \eta. \quad (10)$$

$k = k_\ell$ における式 (1) のスペクトルに対する連続性を仮定する時に, 上の表現は以下の式を満たす必要がある:

$$\beta/\alpha = (-\bar{\psi F}/\bar{\zeta F})^{2/3} k_\ell^{4/3}. \quad (11)$$

本当に強制関数が単色で切断誤差がなければ $k = k_\ell$ をもつ成分のみが上の割合となり β は α と等しいだろう. これらの仮定がどちらも成り立たないために以下の

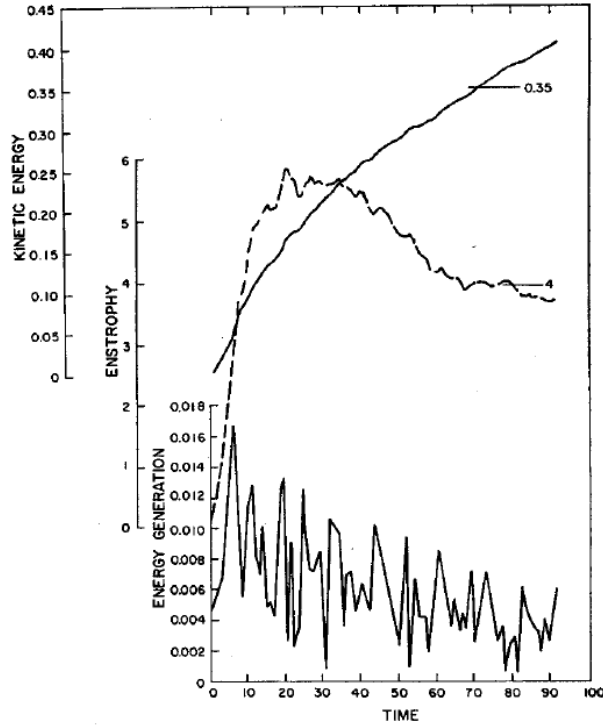


図 8: 基本実験における全エネルギー、全エントロフィーそして全エネルギー生成率.

有効強制波数 k_{eff} を定義することが便利となる:

$$-\overline{\zeta F} / \overline{\psi F} = k_{eff}^2. \quad (12)$$

基本実験に対する割合の項を比較すると, $k_{eff}^2/k_\ell^2 \sim 1.27$ とわかる. これは理論的に予測することもできる. 式 (1) における係数として α_{eff} と β_{eff} を定義すると, これらは k_ℓ の位置に k_{eff} を代入することで得られ, このとき式 (9) と (10) を導く条件下で $\alpha_{eff} = \beta_{eff}$ と両式は Kraichnan のモデルをより理想化した設定に相当すべきであろう. $E(k_\ell)$, $d\bar{E}/dt$ そして η の値から計算された α_{eff} と β_{eff} がわかる. 図 5 中の下線に対応する時刻および波数 4 実験の $t = 20$ で以下の値が得られる:

$$\begin{aligned} \alpha_{eff} &\sim 6.2, & \beta_{eff} &\sim 4.8, & \text{波数 } 8; \\ \alpha_{eff} &\sim 4.32, & \beta_{eff} &\sim 4.05, & \text{波数 } 4. \end{aligned}$$

波数 k_ℓ は厳しい切断誤差とエイリアジング誤差^{*19} の領域からそれ以上に除かれているために後者の両値はおそらくより正確なものである.

式 (1) では高波数スペクトルが $k = k_d$ での切断が仮定されている. この意味づけを明らかにするためにコルモゴロフのマイクロスケールと類似するような名ば

^{*19}[原文脚注 7] 後で理論的な減衰スペクトルのより正確な計算では β の値は 2.0 付近を示すだろう. この不一致はまだ説明されていないままである.

かりのエンストロフィー散逸スケール λ_d を以下のように定義できる:

$$\lambda_d = (\nu^3/\eta)^{1/6}. \quad (13)$$

全エンストロフィー散逸は積分,

$$\int_{k_e}^{k_d} k^4 E(k) dk,$$

を計算し, それを $\eta/2\nu$ と同等とすることで切断スケールと関係づけられる. この結果は, $(k_e/k_\ell)^{10/3} \ll 1$ と仮定した後では,

$$\eta^{1/3}/\nu = \beta \left(k_d^2 - \frac{2}{5} k_\ell^2 \right),$$

もしくは, 式 (13) を代わりに用いると,

$$k_d^2 - \frac{2}{5} k_\ell^2 = 1/(\beta \lambda_d^2), \quad (14)$$

となる^{*20}. 数値計算では左辺第二項はほとんど無視できる, 例えば基本実験だと $k_\ell \lambda_d \sim 1/7$ であり, $k_d \lambda_d \approx \beta^{-1/2} \sim 0.45$ である. したがって基本実験では

^{*20}式 (14) を導出する. 全エンストロフィー散逸は,

$$\int_{k_e}^{k_d} k^4 E(k) dk = \int_{k_\ell}^{k_d} k^4 E(k) dk + \int_{k_e}^{k_\ell} k^4 E(k) dk,$$

のように分けられる. まず, 強制より小さなスケールのエンストロフィー散逸は, 本文中の式 (1) を用いて,

$$\int_{k_\ell}^{k_d} k^4 E(k) dk = \int_{k_\ell}^{k_d} k^4 (\beta \eta^{2/3} k^{-3}) dk = \frac{1}{2} \beta \eta^{2/3} (k_d^2 - k_\ell^2), \quad (1)$$

となる. 次に強制より大きなスケールのエンストロフィー散逸は, 本文中の式 (1) の連続性を仮定することで,

$$\begin{aligned} \int_{k_e}^{k_\ell} k^4 E(k) dk &= \int_{k_e}^{k_\ell} k^4 (\alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}) dk = \frac{3}{10} \alpha \epsilon^{2/3} k_\ell^{10/3} \left\{ 1 - \left(\frac{k_e}{k_\ell} \right)^{10/3} \right\} \\ &\sim \frac{3}{10} \alpha \epsilon^{2/3} k_\ell^{10/3} \\ &= \frac{3}{10} \beta \eta^{2/3} k_\ell^2, \end{aligned} \quad (2)$$

と計算できる. 上の (1) と (2) を足し上げることで, 全エンストロフィー散逸は,

$$\int_{k_e}^{k_d} k^4 E(k) dk = \beta \eta^{2/3} \left(\frac{1}{2} k_d^2 - \frac{1}{5} k_\ell^2 \right), \quad (3)$$

と表せる. これが $\eta/2\nu$ と同等とすると上の (3) より

$$\eta^{1/3}/\nu = \beta \left(k_d^2 - \frac{2}{5} k_\ell^2 \right),$$

$k_d/k_\ell \sim 3$ である。この結果から計算されたスペクトルにおいて粘性切断を確認することが期待できる。その欠如は非線形項中のエイリアジング誤差と有限差分ラプラシアン中の切断誤差の組み合わせにあるとする。そのエイリアジング誤差は高波数側でエネルギーを集積し、その切断誤差は高波数側で粘性減衰を減らす。

運動の最大スケール k_e と全平均自乗速度、もしくは強制スケール k_ℓ とその特徴的な速度 v_ℓ のどちらか一方の項を用いて、レイノルズ数を表すことができる。後者はより適切であり、ほとんど時間とともに一定である^{*21}。したがって、強制レイノルズ数を、

$$R_F = v_\ell / \nu k_\ell, \quad (15)$$

と定義する。ここで、

$$\frac{v_\ell^2}{2} = \int_{k_\ell}^{k_d} E(k) dk,$$

は、強制スケールよりも小さいすべてのスケールと関係のあるエネルギーである。式 (1) の二番目の部分から、 R_F を以下のようにエンストロフィー散逸率と関係づける：

$$\eta = k_\ell^6 \nu^3 \left(\frac{R_F^3}{\beta^{3/4}} \right).$$

これを、式 (13) と (14) に代入することで、

$$\frac{k_d}{k_\ell} \approx \frac{1}{\beta^{1/2} \lambda_d k_\ell} = \frac{R_F^{1/2}}{\beta^{3/4}}, \quad (16)$$

を得る。これは、強制レイノルズ数と散逸スケールの直接的な関係を示している。基本的な波数 8 の実験では $R_F \sim 100$ である。一方で、波数 4 の場合は $R_F \sim 260$ である。

6 生成率中の不安定性

エネルギー積分とエンストロフィー積分の時間発展においてあまり予測できないふるまいが見られた。エネルギー生成率とエンストロフィー生成率の項、つまりを得る。これと本文中の式 (13) から下の関係式が導ける：

$$k_d^2 - \frac{2}{5} k_\ell^2 = 1 / (\beta \lambda_d^2).$$

よって本文中の式 (14) が導出できた。

^{*21}最大波数 k_e は時間とともに低波数側へ発展するのに対して、強制波数 k_ℓ は時間によらず一定であることを意味している。

$-\overline{\psi F}$ と $\overline{\zeta F}$, は強制関数の増幅と強制波数に関連する平均自乗速度の共分散に比例すると考えられる. つまり,

$$\begin{aligned}\overline{\psi F} &= -r|F|v_F/k_{eff}, \\ \overline{\zeta F} &= r|F|v_F k_{eff}.\end{aligned}\quad (17)$$

である. ここで, $v_F^2/2 = E(k_\ell)\Delta k$ であり, エネルギーは強制波数帯 Δk にあり, r は無次元の相関係数である. 初期の線形段階と非線形レジームへの調節時間の後に r は一定値へ近づくと仮定される. その場合, 低波数へ続く拡大を除くエネルギースペクトル全体のように, エンストロフィーとエネルギー生成率そして $d\overline{E}/dt$ はすべて一定となることが示されるはずである. 図 8 はこの仮定が検証されていないことと, 一定になると予測されていた量すべてがゆっくりとそしてやや不規則に減ることを示している. 図 8 の値から実行された計算は相関係数 r が無次元時間 $t = 30$ でのおよそ 0.45 から $t = 90$ でのおよそ 0.35 減ることがわかる.

強制スケールにある運動と強制関数の無相関の原因は明らかに大規模な流れの発展にある. 強制関数は適当な場所に固定され, その自己相関時間 τ の間に任意の点で同じ符号の渦度を発生させようとする. もし局所的な大きさ \overline{U} のような大規模な速度が存在するならば, その速度はオーダー $(k_\ell \overline{U})^{-1}$ の時間中に新しく生じた渦度を取り除き, もしこの時間が τ よりも非常に短いならば, 有効エネルギー生成率と有効エンストロフィー生成率は消えるだろう. この過程のより定量的な描写は式 (2) の線形化された形を考えることで導かれる. その式には強制スケールと関係のある渦度は大規模流れ中の揺らぎ ζ' であると仮定する.

粘性を無視すると線形化された方程式は,

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\overline{U} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + F, \quad (18)$$

である. ここで, \overline{U} は平均速度もしくは大規模な速度の成分である. $\zeta' \propto \exp(ik_\ell x)$ と仮定すると, 初期条件を無視して, 式 (18) は,

$$\zeta' = \exp[ik_\ell(x - \overline{U}t)] \int_0^t \exp(ik_\ell \overline{U}s) F(s) ds, \quad (19)$$

によって与えられる解をもった常微分方程式となる. 平均エンストロフィー生成はこのとき以下の積分の実部である:

$$\overline{\zeta' F} = \exp(-ik_\ell \overline{U}t) \int_0^t \exp(ik_\ell \overline{U}s) \overline{F(s)F(t)} ds. \quad (20)$$

積分内のバーつきの項は式 (7) を $F(s)$ と $F(t)$ に代入し, 必要な積分を実行することで計算できる. $|t' - t''| \leq \Delta t$ (それ以外ではゼロ) のとき $\widehat{F}(t')\widehat{F}(t'') = \widehat{F}^2$ と

わかる^{*22} . 結果は,

$$\overline{F(s)F(t)} = \overline{\hat{F}^2} \exp[(s-t)/\tau], \quad s \leq t, \quad (21)$$

である. これを式 (20) に用いて, 再び積分すると, エンストロフィー生成積分の実部は以下のように計算される:

$$\operatorname{Re}(\overline{\zeta'F}) = \frac{\overline{\hat{F}^2}/\tau}{\tau^{-2} + (k_\ell \bar{U})^2}. \quad (22)$$

この結果は $(k_\ell \bar{U})^{-1}$ が τ よりも非常に短いときに $(k_\ell \bar{U})^{-1}$ は有効結合時間である. ここで, \bar{U} が大きき $(2\bar{E})^{1/2}$ であると見積もるならば, 積分領域の大部分でエネルギー生成と渦度生成が非常に減ったことが明らかになる^{*23}. 図 4 の時刻では $(k_\ell^2 \bar{E})^{-1} \sim 30$ であったが, 一方で $\tau^{-2} = 4$ であった. しかしながら, 全エンストロフィー生成はほとんど全く減らなかった. なぜなら, 低速度の狭い領域, 例えば大きなセルの中心付近, では \bar{U} は小さいからである. このとき, これらの領域は式 (22) の空間積分を支配する. 効果全体は式 (5) の右辺もしくはこの式の有限差分をとったものに移流項 $-V \cdot \nabla F$ を加えることで明らかに取り除かれるだろう. その場合, 強制関数はもはや単色ではないだろうが, おそらく実際の準二次元流体における典型的なエネルギーを生成する乱流により正確に一致するだろう.

7 いくつかの地球物理学的解釈とその他の解釈

例えば, 強い回転や成層を伴うような一定の状況下の実験室では準二次元流れを作り出すことができる. それは, 地球の大気海洋といくつかの惑星大気およびおそらく太陽の上層大気における大規模な構造のもつ標準的な特徴である. 今回の結果に示される主な定性効果の一つである, 小さなスケールからより大きなスケールへのエネルギー輸送はすでに観測されており, 長年にわたってある程度理解されてきた^{*24}. エンストロフィー慣性領域が当然存在することを支持する証拠も蓄えられている. Ogura^{*25}, Kao^{*26} そして al-Gain^{*26} と Wiin-Nielsen^{*27} は経度方向の波

^{*22}強制関数の定義により, \hat{F} は Δt 間でのみ相関があることから明らかである.

^{*23}式 (22) より \bar{U} が大きければ, エネルギー生成やエンストロフィー生成が小さくなる (k_ℓ, τ は固定). これは, 渦度場や流れ関数場が \bar{U} によって移流されるため, \bar{U} が大きければこれらの相関が無くなるという考えと一致する.

^{*24}[原文脚注 8] R. Fjørtoft, Tellus 5, 225 (1953).

^{*25}[原文脚注 9] Y. Ougra, J. Meteorol. 15, 375 (1958).

^{*26}[原文脚注 10] S. K. Kao と A. A. al-Gain, J. Atmos. Sci. 25, 214 (1968).

^{*27}[原文脚注 11] A. Wiin-Nielsen, Tellus 19, 540 (1967).

数 n がおよそ 8 から少なくとも 15 の間の大気中にはおよそ n^{-3} のエネルギー Spektrum が明らかに存在していることを示した。これらの波数は、大規模な運動エネルギーの大部分が生じるような強い傾圧不安定をもつ波数 (4 から 8) と、大気はもはや準二次元的とは考えられない波数 (> 50) の間の領域にある。

Wiin-Nielsen (1967) にある図の一つがここで図 9 として再現されている。理論的予測と我々の実験結果が異なるので、図の低波数領域はとても面白い。大気において大規模なエネルギーが地面との直接的な摩擦によって散逸される。これは対流圏界面付近での強い鉛直シア領域においても明らかに見られる^{*28}。この点において大気は二次元流体と異なる。しかしながら、第一近似では、Hooke の法則を渦度方程式に加えることで現在の問題設定の範囲内で摩擦効果がシュミレーションされるかもしれない。したがって式 (1) は以下のように書き換わる^{*29}：

$$\frac{d\zeta}{dt} = F + \nu \nabla^2 \zeta - K\zeta. \quad (23)$$

表面摩擦係数 K が大気上層と下層における摩擦抵抗の大きさと一致するように適切にスケールされるならば摩擦係数の主な効果は、Spektrum 中の多くのエネルギー部分、つまり大規模流れからエネルギーを取り除くことが期待できる。

最近の研究では太陽大気も運動の大規模なスケールにおいて準二次元的であることが示唆されている^{*30 *31}。太陽大気の大規模なスケールの駆動機構は明らかではないが現在の研究では、小規模な熱対流「粒状斑」において解放されるエネルギーによってSpektrum全体が生成および維持されているかもしれないということが示唆されている。抵抗力が小さい場合にのみこれは起こる。流体中の小規模な三次元の流体運動とより大きな準二次元流れとが結合するといった一般的な問題は、地球物理学のいくつかの分野において興味深く重要な問題である。しかしその問題はこの研究の範囲を超えたところにある。

今の結果を適用するもう一つの分野は三次元の流体運動における二次元のシュミレーションに対する正しい解釈を確実なものにするところにある。計算速度とストレージの制限によりたとえいくつかの場合で関係のある物理現象が三次元乱流を示していると知っていても流れ問題の数値解の多くは今まで二次元に制限されている。今明らかなことは、二次元の数値計算の正確な応用は準二次元流れに対するもの、何らかの方法で十分に発達した乱流になることを抑えた三次元流れに対するもののどちらか一方である。数値計算の設備が急速に拡大しているにもかかわらず完全な三次元流れの数値計算は難しく、場合によっては高価なままであろう。

^{*28}[原文脚注 12] E. C. Kung, Monthly Rev. **95**, 593 (1967) .

^{*29}ここで、式 (23) の右辺第三項は Ekman 摩擦を表している。むにゃむにゃ。

^{*30}[原文脚注 13] F. Ward, Pure Appl. Geophys. **58**, 157 (1964) .

^{*31}[原文脚注 14] F. Ward, Astrophys. J. **141**, 534 (1965) .

したがって、乱流を考察する限りにおいて、三次元性のもつ重要な効果を二次元もしくは「2.5」次元の枠組みに組み入れることのできる運動の方程式系の数学的定式化に対する需要がある。

8 まとめ

Kraichnan によって提唱された発達した二次元乱流の仮想的モデルは、単色だがランダムな強制をもつ非圧縮粘性流体に対する Navier-Stokes 方程式系を直接的に数値積分することで試験された。モデルで予測される重要な特徴が数値結果中に支持された。特に結果は、より大きなスケールに増えるエネルギーと飽和するまでその方向に拡大するスペクトルを伴って、強制波数よりも小さな波数における $k^{-5/3}$ エネルギースペクトルの予測と一致した。エイリアジング波数に明らかに関連する数値問題によって、より高い波数において予測される k^{-3} 領域はあまり明らかに検証されなかった。時間切断誤差と空間切断誤差を減らすことでこの問題を解消するための試みは効果的ではなかった。しかし高波数領域を 4 格子間隔の波長よりも非常に大きなスケールに拡大させることは改善につながった。それにもかかわらずエンストロフィー慣性小領域と、その粘性小領域への転移はまだうまく立証されていない。

数値計算に使われた強制関数はエネルギー注入とエンストロフィー注入の一定性を完全には満足していない。部分的な解析からこの不一致が強制関数の方程式中の移流項の欠落に関係があったことを示唆した。その欠落は、強制スケールの流れ場をより大きなスケールに発達した流れ場から幾分切り離そうとする。Kraichnan の予測の検証においてその問題はあまり重要ではなかった。

計算結果は地球大気の特徴と関係があるようである。特にその特徴は、大循環に関する最近の研究において得られた k^{-3} パワースペクトルを説明するかもしれない。太陽循環との考えられる関係も提唱される。最後に結果は二次元の数値計算の枠組みの範囲内での三次元乱流を数値計算する試験の妥当性への疑念を投げかける。

9 謝辞

国立大気研究センター (NCAR) の Control Data 6600 コンピュータによって数値計算が実行された。J. Olinger 氏と D. Fulker 氏によって、勤勉さ、洞察力そして創

造性とともにコンピュータプログラミングが取り扱われた。著者は, R. Kraichnan 博士と C. E. Leith 博士とともに直接議論と連絡を行うことで知見を得た。本研究はアメリカ国立科学財団によって支援された。

付録 A: 三次元等方性乱流の相似則の導出

はじめに、次元的考察から三次元等方性乱流における平衡領域でのエネルギースペクトルを導出する。今、エネルギースペクトル $E(k)$ を、

$$E(k) = C\nu^\alpha \epsilon^\beta F(\nu^\gamma \epsilon^\delta k), \quad (\text{A.1})$$

とおく。ここで、 ν は粘性係数、 ϵ はエネルギー散逸率、 k は波数、 $F(x)$ は普遍無次元関数であり、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれ次元数を表す。 C は定数であり、次元をもつ数であるかは実験によって決まる。各パラメータの次元はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \nu &: [L^2 T^{-1}] \\ \epsilon &: [L^2 T^{-3}] \\ k &: [L^{-1}] \\ E(k) &: [L^3 T^{-2}], \end{aligned}$$

であるから、(A.1) において次元解析を行うと以下の結果が得られる:

$$E(k) = C\nu^{\frac{5}{4}} \epsilon^{\frac{1}{4}} F(\nu^{\frac{3}{4}} \epsilon^{-\frac{1}{4}} k). \quad (\text{A.2})$$

これが平衡領域でのエネルギースペクトルである。次に三次元等方性乱流におけるエネルギー慣性領域^{*1}でのエネルギースペクトルを導出する。ここでは、 $F(x) = x^\kappa$ と仮定する。この仮定のもとで次元解析を行うと、(A.2) より、 $\kappa = -\frac{5}{3}$ と決まる。したがって、エネルギー慣性領域でのエネルギースペクトルは、

$$E(k) = C\epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (\text{A.3})$$

とわかる。

^{*1}平衡領域の中でも粘性による散逸を受けないような領域を慣性領域という。

付録 B: 二次元等方性乱流の相似則の導出

ここでは、二次元等方性乱流の相似則を導く。まず、低波数側のスペクトルについて考察する。二次元等方性乱流において低波数側でのエネルギー・スペクトルは、エネルギー・散逸率 ϵ 、時間 t による関数であるという仮定のもとで次元解析を行う。エネルギー・スペクトル $E(k)$ を、

$$E(k) = D\epsilon^\alpha t^\beta G(\epsilon^\gamma t^\delta k), \quad (\text{B.1})$$

とおく。ここで、 k は波数、 $G(x)$ は普遍無次元関数であり、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれ次元数を表す。 D は無次元の定数である。各パラメータの次元はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \epsilon &: [L^2 T^{-3}] \\ t &: [T^1] \\ k &: [L^{-1}] \\ E(k) &: [L^3 T^{-2}], \end{aligned}$$

であるから、(B.1) において次元解析を行うと以下の結果が得られる:

$$E(k) = D\epsilon^{\frac{3}{2}} t^{\frac{5}{2}} G(\epsilon^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}} k). \quad (\text{B.2})$$

これが平衡領域でのエネルギー・スペクトルである。上式より $k \propto \epsilon^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}}$ とわかり、確かに波数は時間とともに低波数側へ移動することがわかる。つづいて二次元等方性乱流におけるエネルギー・慣性領域でのエネルギー・スペクトルを導出する。ここでは、 $G(x) = x^\kappa$ と仮定する。エネルギー・慣性領域ではエネルギー・スペクトルが時間 t によらないという考察のもとで次元解析を行うと、(B.2) より、 $\kappa = -\frac{5}{3}$ と決まる。したがって、エネルギー・慣性領域でのエネルギー・スペクトルは、

$$E(k) = D\epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (\text{B.3})$$

とわかる。

次に高波数スペクトルを導く。高波数側ではエネルギー・スペクトルが粘性係数 ν 、エンストロフィー・散逸率 η によるという仮定から二次元等方性乱流における平衡領域でのエネルギー・スペクトルを導出する。エネルギー・スペクトル $E(k)$ を、

$$E(k) = D'\nu^{\alpha'} \eta^{\beta'} G'(\nu^{\gamma'} \eta^{\delta'} k), \quad (\text{B.4})$$

とおく。ここで、 $G'(x)$ は普遍無次元関数であり、 $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ はそれぞれ次元数を表す。 D' は無次元の定数である。各パラメータの次元はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \nu &: [L^2 T^{-1}] \\ \eta &: [T^{-3}], \end{aligned}$$

であるから, (B.4) において次元解析を行うと以下の結果が得られる:

$$E(k) = D' \nu^{\frac{3}{2}} \eta^{\frac{1}{6}} G'(\nu^{\frac{1}{2}} \eta^{-\frac{1}{6}} k). \quad (\text{B.5})$$

これが平衡領域でのエネルギースペクトルである. 次に二次元等方性乱流におけるエンストロフィー慣性領域でのエネルギースペクトルを導出する. ここでは, $G'(x) = x^{\kappa'}$ と仮定する. この仮定のもとで次元解析を行うと, (B.5) より, $\kappa' = -3$ と決まる. したがって, エンストロフィー慣性領域でのエネルギースペクトルは,

$$E(k) = D' \eta^{\frac{2}{3}} k^{-3}, \quad (\text{B.6})$$

とわかる.

付録 C: Lilly (1969) による渦度方程式のスケーリング

論文中の式 (2),

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta = F + \nu \nabla^2 \zeta, \quad (\text{C.1})$$

を Lilly (1969) の 3 節に従ってスケーリングする. いま, 流体運動を特徴づける代表的な時間スケールを $|F|^{1/2}$, 代表的な長さスケールを $2\pi k_\ell^{-1}$ として, 式 (C.1) 中のパラメータを,

$$\begin{aligned} t_* &\equiv \frac{t}{|F|^{1/2}} \\ \mathbf{x}_* &\equiv \frac{\mathbf{x}}{2\pi k_\ell^{-1}} \\ \mathbf{V}_* &\equiv \frac{\mathbf{V}}{2\pi k_\ell^{-1} |F|^{1/2}} \\ \zeta_* &\equiv \frac{\zeta}{|F|^{1/2}} \\ F_* &\equiv \frac{F}{2\pi k_\ell^{-1} |F|} \end{aligned}$$

のように無次元化する. ここで, 無次元量は下付き文字 * を用いて表す.