

# 潮汐固定された惑星上の波と平均流の相互作用

Mark Hammond and Raymond T. Pierrehumbert

## 3 ベータ面上の流れゼロでの線形化された浅水方程式系

一層の赤道上の線形化された浅水方程式系を用い、潮汐固定された惑星の大気をモデルする。これらの方程式系は、一層の密度一定の流体の運動を記述する。ここでその流れの水平スケールは流体深さよりも非常に大きい。これらの方程式系の線形系はこの層に対して小さな擾乱を記述する (Vallis 2006). Showman & Polvani (2011) と似た浅水モデルが与えられて潮汐固定された大気をモデルする。モデルは一層の浅水方程式系に伴う活発な上層と一致し、上層から静止した層へ質量と運動量を輸送することができる。強制は、星の加熱が  $Q$ 、放射平衡高度場への緩和、で示されることの結果である。

この節では、ベータ面上の定常強制への波の応答を導出する (Matsuno 1966)。ベータ面の系はコリオリパラメータを線形近似し、それは低緯度においてのみ正確であるが、完全な球面の幾何学よりも直感的で有用な解を導く。5 節では球面幾何学の方程式系を解き、潮汐固定された惑星の大気に関する他の研究 (Showman & Polvani 2011, Heng & Workman 2014) にあるようにベータ面近似が非常に似た解を導くこと示す。

全ての物理量は、東西平均された背景値  $F(y)$  と擾乱の和として線形化され、 $f(y)e^{i(k_x x - \omega t)}$  の形式をもつ (Matsuno (1966) とは異なる、彼はあまり慣習的でない形式  $f(y)e^{i(k_x x + \omega t)}$  を用いた)。本論文では、 $\bar{U}$  と  $\bar{H}$  などの東西平均量に対しては大文字を用い、 $u$  と  $h$  などの背景に対する擾乱には小文字を用いる (強制  $Q$  などの特定の他のものでない場合に限る)。背景の流れがゼロをもつこれらの擾乱

に対する浅水方程式系は以下の通り:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v + \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u + \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

ここで  $h$  は高度,  $c = \sqrt{gH}$  は重力波速度 (Matsuno 1966), そして摩擦や減衰は無い. 時間スケール  $\sqrt{1/c\beta}$  と長さスケール  $\sqrt{c/\beta}$  (赤道ロスビー変形半径  $L_R$ ) を用いて無次元化し, 全ての物理量が  $f(y)e^{i(k_x x - \omega t)}$  の形式をもつと仮定すると, 自由振動の方程式系は以下の通り:

$$\begin{aligned}-i\omega u - yv + ik_x h &= 0 \\ -i\omega v + yu + \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ -i\omega h + ik_x u + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

### 3.1 流れゼロの自由振動解

自由モデルに対する分散関係式は以下の通り:

$$\omega^2 - k_x^2 - \frac{k_x}{\omega} = 2n + 1\tag{3}$$

そして自由モード  $\xi$  は以下の通り:

$$\begin{pmatrix} v \\ u \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(-\omega_{nl}^2 - k_x^2)\psi_n \\ \frac{1}{2}(-\omega_{nl} - k_x)\psi_{n+1} + n(-\omega_{nl} + k_x)\psi_{n-1} \\ \frac{1}{2}(-\omega_{nl} - k_x)\psi_{n+1} - n(-\omega_{nl} + k_x)\psi_{n-1} \end{pmatrix}\tag{4}$$

ここで  $\psi_n = e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y)$  (放物柱間数, 付録 A.3 を見よ). これらの解において  $l$  は,  $n$  で示される各モードの三つのルートを表す (Matsuno 1966).

### 3.2 流れゼロの強制振動解

Matsuno (1966) は減衰率  $\alpha$  をもつ強制  $Q$  に対する定常な応答を導く. 強制項と散逸項を導入し, それからこれまで通り  $x$  に依存する正弦関数を課す:

$$\begin{aligned}\alpha_{dyn}u - yv + ik_x h &= F_x \\ \alpha_{dyn}v + yu + \frac{\partial h}{\partial y} &= F_y \\ \alpha_{rad}h + ik_x u + \frac{\partial v}{\partial y} &= Q\end{aligned}\tag{5}$$

これらは無次元の一定強制  $\sigma = (F_x, F_y, Q)$  に対するものであり, 力学減衰  $\alpha_{dyn}$ , 放射減衰  $\alpha_{rad}$  である. Matsuno (1966) は  $\alpha_{dyn} = \alpha_{rad} = \alpha$  とし, 厳密解を与えるために高度  $h$  でガウシアン of 強制を課す:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_0 e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{pmatrix}\tag{6}$$

境界条件は以下の通り:

$$u, v, h \rightarrow 0 \quad \text{for } y \rightarrow \pm\infty\tag{7}$$

Matsuno (1966) は強制解  $\chi$  が自由解  $\xi$  の和で表現できることを示す:

$$\chi = \sum a_m \xi_m\tag{8}$$

ここで

$$\begin{aligned}a_m &= \frac{1}{\alpha - i\omega_m} b_m \\ b_m &= \frac{\int \xi_m(y) \sigma(y) dy}{\int |\xi_m(y)|^2 dy}\end{aligned}\tag{9}$$

図 1 の二番目の図はこの強制応答を示しており, 応答係数  $\alpha_m$  で重みづけられた自由モードの和で与えられる. 放射減衰率と力学減衰率はともに  $\alpha = 0.2$  を用い (この同等性は後に緩和される), Matsuno (1966) と対応づけるために強制の大きさは  $Q_0 = 1$  を用いた. これは, ホットジュピターを表すために Showman & Polvani (2018) で用いられた値の範囲とも整合的である.

偶数パリティの強制  $Q_0$  はただ  $u$  と  $h$  の偶数モードと,  $v$  の奇数モードを励起するだけであり, ここで浅水方程式系において  $v$  は  $u$  と  $h$  とは位相が  $\pi$  異なる. 口

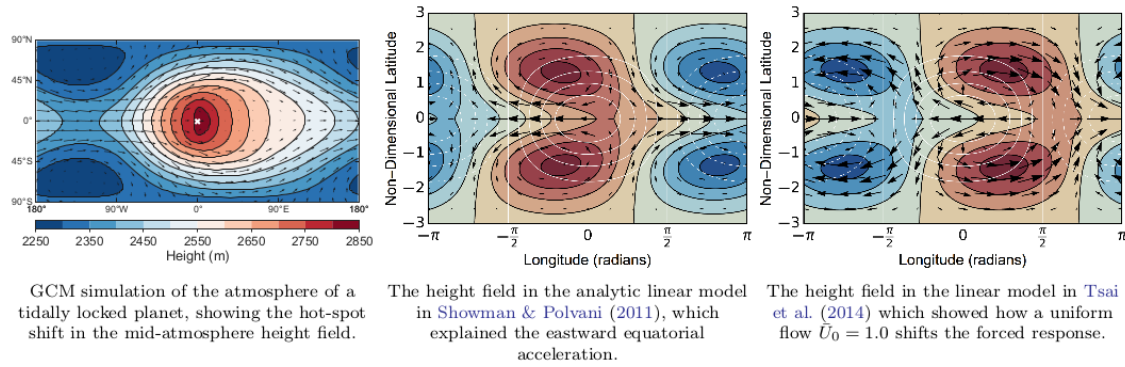


図 1: この話題に関するこれまでの研究のまとめ。これまでの線形浅水モデル (二番目と三番目の図) がそのような惑星のシミュレーションでの平衡的な循環をどの程度、完全に説明できていないかを示す。高高度の領域は赤色、低高度の領域は青色である。一番目の図において亜恒星点は緯度  $0^\circ$  経度  $0^\circ$  にある白色の十字である。二番目と三番目の図において強制  $Q$  は白色で重ね描きされており、正の強制に対しては実線のコンター、負の強制に対しては破線のコンターをもつ。

スビー波モードとケルビン波モードは最低振動数をもつので、強制応答を支配し、よってこれらは振動数ゼロの定常強制と準共振状態にある (?)。

方程式 (12) は、一様な背景の流れは振動数  $\omega_m$  をドップラーシフトでき、経度を変える波の応答の虚数部分を変化させる (?)。図 1 の三番目の図は、東向きの東西流によってドップラーシフトされたとき、二番目の図での強制応答がどのように変化するかを示す。

### 3.3 東西流の形式と効果

これらの定常波は大気を通じて運動量を輸送することができる。東西方向の運動方程式は、東西方向の加速度が定常波の応答の勾配に依存することを予測する (Andrews & McIntyre 1976)。Showman & Polvani (2011) はこの加速度を示す:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}(y)}{\partial t} = & \bar{v}^* \left( f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial ((\bar{h}v)'u')}{\partial y} \\ & + \left( \frac{1}{\bar{h}} \bar{u}'Q' + \bar{R}_u^* \right) - \frac{\bar{u}^*}{\tau_{\text{drag}}} - \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial (\bar{h}'u')}{\partial t} \end{aligned} \quad (10)$$

ここでバーは東西平均、プライムは東西平均からの偏差を示し、「任意の物理量  $A$  の厚さで重みづけられた東西平均」は  $\bar{A}^* = \bar{h}A/\bar{h}$  である (Showman & Polvani 2011)。 $R_u$  は鉛直方向の運動量輸送  $\mathbf{R}$  の東西成分である:

$$\mathbf{R} = \begin{cases} -\frac{Qv}{\bar{h}}, & Q > 0 \\ 0, & Q < 0 \end{cases} \quad (11)$$

Showman & Polvani (2011) はなぜ (図 6 の一番目の図にあるような) 傾斜した波のパターンは東向きの東西運動量を赤道に運ぶのかを示す. 傾斜によって「北半球では  $u'v' < 0$ , 南半球では  $u'v' > 0$ 」の速度場をもたらし, よって式 (10) の  $u'v'$  の項が東向きの加速を生む.

図 2 はこの高速風加速の緯度分布を示す. この図は図 1 の二番目にある強制応答から計算される. 黒線は  $\partial\bar{U}(y)/\partial t$  であり, これは式 (10) 中の第一項 (青線), 第二項 (赤線), 第三項 (紫線) そして第四項 (緑線) の和である. 長さスケールと時間スケールが与えらえると (Matsuno 1966), 赤道での加速度  $0.1$  は, 地球のような惑星上での有次元加速度  $0.01 \text{ ms}^{-2}$  もしくはホットジュピター上での有次元加速度  $0.1 \text{ ms}^{-2}$  を示唆する. GCM の結果は, 20 日間の安定状態から, 地球のような惑星上で  $100 \text{ ms}^{-1}$  のオーダーの高速風 (7 節を見よ) と, ホットジュピター上で  $1000 \text{ ms}^{-1}$  のオーダーの高速風となることを示す. それゆえにベータ面上の線形浅水モデルは約 20 倍と非常に大きな加速度を予測する. 後にこのこと理由は, (ベータ面上の高速風速度で線形的に高速風の高度擾乱がスケールされるように) 高速風による高度擾乱とバランスするためにベータ面モデルが非現実的に大きな強制を必要とするからであるということを示す (?). 高速風速度で高速風の高度擾乱が二次的に (正しく) スケールされるように, 球面幾何学上のモデルはより現実的な赤道加速を与え, よってより小さな強制  $Q$  でバランスされる.

図 2 にある正味の赤道加速は東向きであるが, 赤道から離れたところで西向きの加速がある (Showman & Polvani 2011). 異なる惑星パラメータを与えられた別の研究のシミュレーションのいくつかは西向きの強い高速風を示す (Showman et al. 2015) けれども, 我々の GCM の結果は定常ロスビー波の圧力レベルにおいて重大な東西平均した西向きの流れを示さない. 線形モデルから予測される西向きの加速は, GCM 中のハドレー循環によって生じる東向きの加速によって阻まれる. そのような東向き加速は線形モデルにおいては表現されない. 実際の惑星や GCM の上層大気もしくは下層大気では東向きの流れも起こる. このことは一層モデルでは表現されない.

v このような加速による東向きの流れは強制波の解に影響を与える. 東西方向に一樣な高速風は式 (12) 中の射影係数を修正し (Tsai et al. 2014), 強制の前方に最大  $\pi/2$  だけ東向きに波をドップラーシフトさせる. 流れは  $k_x\bar{U}$  による自由モードの振動数  $\omega$  を変え, そのとき自由モードを強制解に射影する係数の虚数部分に影響を与える:

$$a_m = \frac{1}{\alpha - i(\omega_m - k_x\bar{U})} \quad (12)$$

正の東向き流れ  $\bar{U}$  は波の応答を東向きに変える. 図 1 の三番目の図は一樣な流

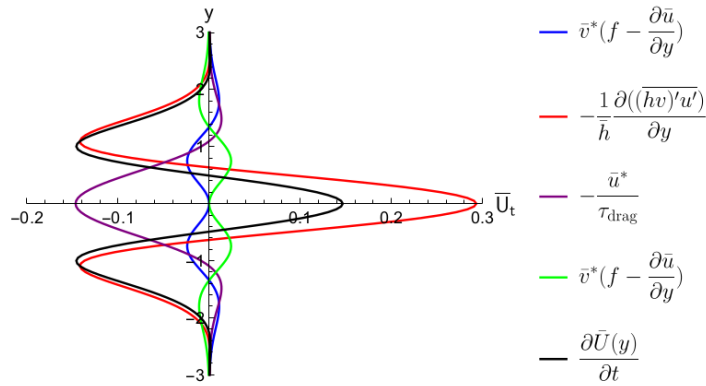


図 2: 背景流れゼロにおける東西加速度分布. 方程式 (10) を用いることで計算された. これは赤道において東向きは無次元加速を示す. 黒線は 四つの色付き線の和を示す.

れがどのように強制解の最大値を経度方向に  $+90^\circ$  変えるのかを示す. 重要なシフトに対しては, 振動数シフト  $k_x \bar{U}$  は  $\omega_m$  のオーダーでなければならない, つまり高速風速度  $\bar{U}$  は  $\omega_m/k_x$  でなければならない. 東西波数  $k_x$  (周期的な系においては  $k_x = 1$ ) とモード  $n$  に対する振動数は  $\omega^2 - k_x^2 - k_x/\omega = 2n+1$  の解である. よって,  $k_x \bar{U} \approx 0.25$  のときに  $n = 1$  のロスビー波のドップラーシフトが重要である. これらの惑星波の東西波数のスケールは惑星半径によって決まる. つまり  $k \sim 1/a \sim 1$  である. 有次元速度は  $[U] = c = (gH)^{1/2}$  であり, よって  $\omega_m \sim k_x \bar{U}$  でロスビー波が非常にシフトされるところでの高速風の臨界速度は  $\bar{U}_{crit} = (gH)^{1/2}/4$  である (?).

地球のような惑星に対しては  $g \sim 10 \text{ ms}^{-2}$  で  $h_e \sim 5 \text{ km}$  であるから, よって  $\bar{U}_{crit} = 50 \text{ ms}^{-1}$  である. GCM シミュレーションは  $100 \text{ ms}^{-1}$  のオーダーの平衡的な高速風速度を示し, よってドップラーシフトは重要であるべきである. ホットジュピターは  $g \sim 20 \text{ ms}^{-2}$  と  $h_e \sim 200 \text{ km}$  をもち (Showman & Polvani 2011), よって  $\bar{U}_{crit} = 500 \text{ ms}^{-1}$  である. GCMs と観測は,  $1000 \text{ ms}^{-1}$  のオーダーの平衡的な高速風速度を示し, よってドップラーシフトは再び重要であるべきである. 4 節では非一様な高速風について浅水方程式系を線形化する.

## 4 ベータ面上のシア一流における線形化された浅水方程式系

この節では, この論文の主な結果, 東西に一様なシア一流  $\bar{U}(y)$  と高度  $\bar{H}(y)$  の周りで線形化された浅水方程式系に対する解, について議論する (Boyd 2017).  $\bar{H}(y)$

と  $\bar{U}(y)$  は方程式系 (1) の二番目の式を満たし、よってこれらは地衡流平衡下にある ( $\bar{H}_y(y) = -y\bar{U}(y)$  <sup>\*1</sup>). ガウシアン的高速風  $\bar{U}(y) = U_0 e^{-y^2/2}$  に対して高度擾乱は  $\bar{H}(y) = U_0 e^{-y^2/2}$  である <sup>\*2</sup>.

これまで通り、強制の大きさ  $Q_0 = 1$  と、放射減衰率と力学減衰率  $\alpha_{rad} = \alpha_{dyn} = 0.2$  を用いる (Matsuno 1966). 4.4 節では放射減衰率と力学減衰率が等しくない場合の効果について議論していく. 3.3 節で説明したように、オーダー 1 の東西流によって強制応答が東向きに大きく移動し、よって無次元速度  $U_0$  を 0 から 1 に変化させる.

強制の大きさ  $Q_0$  は高速風によって生成される速度と高度に匹敵し、その速度と高度はともに  $U_0 = 1$  のオーダーをもち、よって  $Q_0 = 1$  とする. この大きな強制は図 2 にある 0.1 のオーダーの東西高速風加速の結果として生じる. その加速は高速風が GCM でのものより約 10 倍速くなることを示唆する. このことは、前に議論されたベータ面上で必要とされる大きな強制によるものである. 5 節では球面幾何学におけるより現実的な強制の大きさがより物理的に合理的な加速を生むことを示していく.

$\bar{U}(y)$  と  $\bar{H}(y)$  の新しい背景は 3 節の浅水方程式系を以下のように変化させる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_{dyn} u + \frac{\partial \bar{U}(y)u}{\partial x} + \left( \frac{\partial \bar{U}(y)}{\partial y} - y \right) v + \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha_{dyn} v + \frac{\partial \bar{U}(y)v}{\partial x} + yu + \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{H}' u}{\partial x} + \bar{H}' \frac{\partial v}{\partial y} - y\bar{U}(y)v + \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha_{rad} h + \frac{\partial \bar{U}(y)h}{\partial x} &= Q(y) \\ \bar{H}' &= 1 + \bar{H}(y) \end{aligned} \quad (13)$$

解は  $A(y)e^{i(k_x x - \omega t)}$  の形をもつ. 系の自由 (非強制) モードを考えるために、 $Q(y) = 0$  と  $\partial/\partial t = -i\omega$  とし、自由線形系を与える:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{dyn} + ik_x \bar{U}(y) & \frac{\partial \bar{U}(y)}{\partial y} - y & ik_x \\ y & \alpha_{dyn} + ik_x \bar{U}(y) & \frac{\partial}{\partial y} \\ ik_x \bar{H}' & -y\bar{U}(y) + \bar{H}' \frac{\partial}{\partial y} & \alpha_{rad} + k_x \bar{U}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} \quad \bar{H}' = 1 + \bar{H}(y) \quad (14)$$

定常強制 (この場合、昼夜の加熱差) に対する静止した応答を調べるために、

<sup>\*1</sup> $\beta$  は?

<sup>\*2</sup> $\bar{H}(y) = H_0 e^{-y^2/2}$  ではないのか?

$Q(y) = Q_0 e^{-y^2/2}$  (Matsuno 1966) で  $\partial/\partial t = 0$  とし、強制線形系を与える:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{dyn} + ik_x \bar{U}(y) & \frac{\partial \bar{U}(y)}{\partial y} - y & ik_x \\ y & \alpha_{dyn} + ik_x \bar{U}(y) & \frac{\partial}{\partial y} \\ ik_x \bar{H}' & -y \bar{U}(y) + \bar{H}' \frac{\partial}{\partial y} & \alpha_{rad} + k_x \bar{U}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q(y) \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}' = 1 + \bar{H}(y) \quad (15)$$

付録 A では放物柱関数を用いて解を展開することによって疑似スペクトル法を用いることでこれらの方程式系の両方をどうやって解いたのかを説明する. 付録 A.3 ではこの方法の正確性を示し, 疑似スペクトル法が背景の高速風がない場合の厳密解を確かめることと, 背景流れをもつ解が  $n = 30$  を超える任意のモードに対しては 10,000 分の 1 以下だけ変化することを説明する. 疑似スペクトル法は自由モードを支配する固有値方程式に対する  $N_m$  個の解 (計算で用いられたモードの数) を見つける. これらの多くは偽のものであるが, それらの固有値を調べることでそれらと物理的なモードを区別することができる. 強制線形系に対しては疑似スペクトル法は解をひとつだけ生成し, それは説明のためにより簡単である.

浅水系の平均高度  $H_0$  (上では 1 で無次元化された) は大気鉛直加熱分布によって励起される鉛直モードで決まる. Tsai et al. (2014) は, 潮汐固定された惑星において鉛直加熱分布が一連の鉛直モードを励起し, 一連の水平モードを導く. これらのモードのうちのひとつにおいて, エネルギーの大部分は保存され, よってこの鉛直モードと高度  $H_0$  と関連する水平モードを考えるだけなら十分である.

#### 4.1 シア一流中の自由解

この節では, 次節にある強制応答への変化を理解するために方程式 (14) の自由モードにおけるシア一流の効果を議論していく. 3 節ではどのように一様な背景流れ中の浅水方程式 (方程式 (15)) に対する強制解が方程式 (9) を用いることで自由モードの和で表現できるのかを示した. 方程式 (14) に対する自由解のそのような簡単な和を用いてシア一流背景流れ中の方程式 (15) に対する強制解を表現することはできない. けれども, 依然として方程式 (14) に対する自由解を用いて, 4.2 節にある数値的にみられる強制解を定性的に理解することができる.

浅水方程式系に対する自由解を緯度の複素関数  $A(y)$  と書く. 後に, 強制解を  $A(y)e^{i\delta(y)x}$  の形で緯度と経度の関数として書き, プロットしていく. シア一流中の位相変化  $\delta(y)$  は一様な流れ中の位相変化  $(\omega_m - k_x \bar{U})$  (方程式 (12)) と同等である. 一様な背景流れに対して前の節で行ったように, シア一流中の任意のモードの固



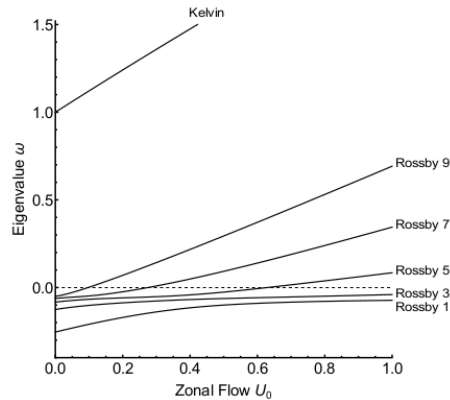


図 3: シアー背景流れ  $\bar{U}(y) = U_0 e^{-y^2/2}$  中の異なる値  $U_0$  に対する, 方程式 (14) の最低次の対称性をもつ自由モードの固有値の実部. 強制応答における各モードの最大値の位置は, その固有値の実部と系における減衰の大きさに依存する.

有値  $\omega_m$  の符号は, 強制解において自由モードがどこで現れるのかを決める.

ベータ面浅水系 (方程式 (14)) の自由モードは背景流れと高度に依存する. 背景流れゼロに対して, 自由モードは 3 節で議論されたものと同じである. 一様な背景流れ  $\bar{U}_0$  をもつ解析解に対して, 自由モードは 3.3 節で議論したように線形的にドップラーシフトされる (Tsai et al. 2014). シアー背景流れ  $\bar{U}(y)$  に対しては, 4 節の初めにあるパラメータ (と等しい放射減衰率と力学減衰率  $\alpha_{rad} = \alpha_{dyn}$ ) で, 付録 A で説明される方法を用いることで, 方程式 (14) の自由モードを見つけた.

図 3 は, 変化する大きさ  $U_0$  をもつ背景流れ  $\bar{U}(y) = U_0 e^{-y^2/2}$  に対する, 方程式 (14) の自由ケルビンモードと対称性をもつ自由ロスビーモードの固有値の実部を示す. これらは対称な強制によって励起される最低次モードである. ケルビンモードはすでに  $U_0 = 0$  に対する正の固有値をもち, 流れが増加すると増加してさらに東へ移動する. そしてケルビンモードを最大変化  $+90^\circ$  の方へ移動させ, ホットスポットの移動に寄与する.

Tsai et al. (2014) は一様な背景流れにおいて  $n = 1$  のロスビーモードは恒星直下点の東へ移動され, ホットスポットの移動を増加させることを示す. 図 3 は, このシアー流  $\bar{U}(y)$  において  $n = 1$  のロスビーモードの固有値が増加するが,  $U_0$  に対しては正にならないことを示す (これは後に図 6 でプロットされる強制応答において高速風速度と一致する). これは, 強制応答においてロスビーモードが移動されることを意味するが, 恒星直下点の東部に達さない. けれども, 高次のロスビーモードの固有値は正となり, 恒星直下点の東部へ移動し, ホットスポットの移動へ寄与する. よって, 強制応答とホットスポットの移動は高次のロスビーモードに影響され, 単にケルビンモードと  $n = 1$  のロスビーモードによって支配されてはい

ない.

$n = 1$  のモードがホットスポットの移動に全く責任がないということを言っているわけではない. 後に球面幾何学においては  $n = 1$  のモードが  $+90^\circ$  東へ移動することを示す. 異なる入力パラメータ (流速, 減衰率) ではベータ面において恒星直下点を過ぎて  $n = 1$  のロスビーモードを移動させることも可能である. しかし, われわれの自由モード展開は  $n = 1$  のロスビーモードは唯一の重要なモードではないことと, 高次のモードも強制応答にとって重要であることを示してきた.