計算機で連立一次方程式を解こう

計算機で連立一次方程式を解く はじめに1

- 自然科学では連立一次方程式を解く機会がたくさんある.

計算機で連立一次方程式を解く はじめに2

- 説明のために次の連立一次方程式を考える.

$$a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1$$
$$a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2$$
$$a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3$$

- このような方程式を解く方法は大きく分けて下の二つの種類がある.
  - 直接法
  - 反復法
- ここでは, 直接法の一つであるガウス・ジョルダンの消去法を考える.

計算機で連立一次方程式を解く ガウス・ジョルダンの消去法 (1)

- 先の方程式は下のように書き直すことができる.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- そして ,この方程式を解くことは, 何らかの方法で下のように変形することに等しい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (2)

- 具体的には下の方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (3)

- 方程式は下のような手順で変形すればよい.
  1. 1 行目を 2 ($= a_{1,1}$)で割る.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

  2. 1 行目に 2 ($= a_{2,1}$)をかけ, 2 行目から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 40 \end{pmatrix}$$

  3. 1 行目に 4 ($= a_{3,1}$)をかけ, 3 行目から引く

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (4)

4. 2 行目を 2 $(= a_{2,2})$ で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. 2 行目に 2 $(= a_{3,2})$ をかけ, 3 行目から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (5)

6. 3 行目を -4 $(= a_{3,3})$ で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7. 3 行目に 1 $(= a_{2,3})$ をかけ, 2 行目から引く

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. 3 行目に 3 $(= a_{1,3})$ をかけ, 1 行目から引く

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (6)

7. 2 行目に 2 $(= a_{1,2})$ をかけ, 1 行目から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- この方法がガウス･ジョルダンの消去法である.
  - なお, この方法では, 行列の対角成分がゼロの場合, 工夫が必要である（ピボット選択）.

参考

- 連立一次方程式を解く方法には他にもある.
  - 直接法
    - ガウスの消去法
    - LU 分解法
    - …
  - 反復法
    - ヤコビ法
    - …