数値計算実習課題 1

斉田美香 (joho07)

2011 年 7 月 21 日

課題 1

問題 1 の解答

1.

　中心星、惑星の質量をそれぞれ m_1,m_2 とし、またそれぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$,$\boldsymbol{r}_2$ とする。中心星に成り立つ運動方程式は、万有引力の法則

$$F = -\frac{GmM}{r^2}$$

を用いると

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}}{|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|^3} \tag{1}$$

となる。同様に惑星に成り立つ運動方程式は

$$m_2\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3} \tag{2}$$

と表すことができる。またここで、(2) 式から (1) 式を引いて、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ で表される相対ベクトルを用いると

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{3}$$

が得られる。
これは $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ という相対ベクトルを用いていることから、中心星から見た惑星の相対運動を表している。中心星と惑星の質量を合わせた質点が、中心星を中心とした回転運動を行っている。

2.

$$\dot{v_x} = \ddot{x} = -G(m_1+m_2)\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

同様にして

$$\dot{v_y} = \ddot{y} = -G(m_1+m_2)\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

問題 2

1.

条件より、重心が原点にあり中心星と惑星は x 軸上にあるので、それぞれの x 座標は質量の逆比で表すことができ、重力定数 **G** は定数であるから μ を用いて

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} = \mu_2 \\ x_2 = \dfrac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} = \mu_1 \end{cases}$$

したがって、

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (-\mu_2,\ 0) \\ (x_2, y_2) &= (\mu_1,\ 0) \end{aligned}$$

2.

角速度 ω で回転しているので

$$\theta = \omega t$$

ここで回転行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を用いると

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すことができるので、

$$\begin{cases} \xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t \\ \eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t \end{cases}$$

3.

2. より、t で一回微分すると

$$\begin{pmatrix} \dot\xi \\ \dot\eta \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t & -\cos\omega t \\ \cos\omega t & -\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix}$$

もう一回微分すると

$$\begin{pmatrix} \ddot\xi \\ \ddot\eta \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & -\cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t & -\cos\omega t \\ \cos\omega t & -\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot x \\ \ddot y \end{pmatrix}$$

整理すると,

$$\begin{pmatrix} \ddot\xi \\ \ddot\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega^2 x - 2\omega\dot y + \ddot x \\ -\omega^2 y + 2\omega\dot x + \ddot y \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\omega t - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\omega t & (4) \\ \ddot{\eta} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\omega t + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\omega t & (5) \end{cases}$$

4.

ここで $\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = X$、$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = Y$ とすると、

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = X\cos\omega t - Y\sin\omega t & (6) \\ \ddot{\eta} = X\sin\omega t + Y\cos\omega t & (7) \end{cases}$$

これと、与式の運動方程式を回転座標系に書き直した以下の式、

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \left[\mu_1 \dfrac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \dfrac{x_2 - x}{r_2^3}\right]\cos\omega t + \left[\dfrac{\mu_1}{r_1^3} + \dfrac{\mu_2}{r_2^3}\right] y\sin\omega t & (8) \\ \ddot{\eta} = \left[\mu_1 \dfrac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \dfrac{x_2 - x}{r_2^3}\right]\sin\omega t + \left[\dfrac{\mu_1}{r_1^3} + \dfrac{\mu_2}{r_2^3}\right] y\cos\omega t & (9) \end{cases}$$

を用いると、

$$\begin{cases} X\cos\omega t - Y\sin\omega t = \left[\mu_1 \dfrac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \dfrac{x_2 - x}{r_2^3}\right]\cos\omega t + \left[\dfrac{\mu_1}{r_1^3} + \dfrac{\mu_2}{r_2^3}\right] y\sin\omega t & (10) \\ X\sin\omega t + Y\cos\omega t = \left[\mu_1 \dfrac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \dfrac{x_2 - x}{r_2^3}\right]\sin\omega t + \left[\dfrac{\mu_1}{r_1^3} + \dfrac{\mu_2}{r_2^3}\right] y\cos\omega t & (11) \end{cases}$$

(8)、(9) 式において、$\sin\omega t, \cos\omega t$ について係数を比較すると、

$$\begin{cases} X = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = -\left[\mu_1 \dfrac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \dfrac{x - \mu_1}{r_2^3}\right] & (12) \\ Y = \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -\left[\dfrac{\mu_1}{r_1^3} + \dfrac{\mu_2}{r_2^3}\right] y & (13) \end{cases}$$

となり導出できた。

5.

ポテンシャル U の式は、

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{\sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2}} \tag{14}$$

と書き換えることができて、x,y についての偏微分を行うと

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \omega^2 x - \left(\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \omega^2 y - \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right) y\end{aligned}$$

したがって、粒子 P についての運動方程式は

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{15}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{16}$$

と表すことができる。

6.

(13)、(14) 式の両辺にそれぞれ $\dot{x}$、$\dot{y}$ をかけて足すと

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \qquad (17)\end{aligned}$$

となる。この式は時間 t で積分できて、

$$U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C_J \tag{18}$$

ここで C_J は円制限 3 体問題におけるヤコビ定数である。